JORGE ANDRÉ SWIECA

QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIAS EM TEORIAS QUÂNTICAS

Tese apresentada à Congregação da Faculdade de Filosofia Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, para Concurso de Livre Docência na Cadeira de Mecânica Quântica e Mecânica Estatística.

SÃO PAULO — 1967

Sumário

O problema da quebra expontânea de simetrias é estudado em teorias de campo relativísticas e em sistemas de muitos corpos.

A existência de um operador unitário associado de maneira usual a simetrias contínuas e que deixa o vácuo invariante, é demonstrada para teorias relativísticas que não possuem estados discretos de massa zero, estabelecendo o teorema conjecturado por Goldstone.

A extensão dos métodos relativísticos à teoria dos muitos corpos é possível quando as forças são de curto alcance em virtude do rápido decrescimento dos comutadores de dois operadores locais com a separação espacial. Obtemos assim neste caso, que a quebra espontânea de uma simetria implica na existência de excitações de energia arbitràriamente pequena. Contudo êste resultado possui essencialmente uma única aplicação: sabemos que a invariância de Galileu é sempre quebrada (num meio com densidade finita). Concluimos assim que num sistema de muitos corpos com forças de curto alcance existem sempre excitações de energia zero.

I - Introdução

É bem conhecido o importante papel que as simetrias e leis de invariância desempenham na física moderna. Principalmente na teoria das partículas elementares onde[1] a inexistência de uma formulação dinâmica satisfatória, faz com que as propriedades de invariância da teoria sejam uma das armas mais poderosas para o seu estudo.

Històricamente foi a invariância de Poincaré a primeira a ser incorporada à teoria das partículas elementares através da formulação da teoria relativística dos campos, levando às leis de conservação de energia, momentum linear, momentum angular e à forma relativística das equações de movimento.

A introdução de invariâncias de "gauge"

$$\phi \longrightarrow e^{i\alpha}\,\phi \qquad (1)$$

levou a leis de conservação de carga e número bariônico, dando um primeiro exemplo de uma simetria interna, isto é, não associada a propriedades espaço-temporais.

A descoberta da independência de carga é traduzida no formalismo pela invariância por rotações no espaço do spin-isotópico e tem como consequência a conservação do spin-isotópico. Contràriamente ao que acontece com a invariância de Poincaré ou de gauge, a invariância de iso-spin não é uma simetria exata da teoria. Com efeito a existência da carga elétrica destroi esta invariância, fazendo com que, por exemplo, o proton se comporte diferentemente do neutron.

Em 1962 um novo passo foi dado na teoria das partículas elementares com a introdução da simetria SU(3) [1]. Consiste esta numa generalização da invariância de isospin levando de uma maneira natural à noção de hipercarga ou estranheza.

Assim se pela SU(2) do spin-isotópico o proton-neutron , sigma + o - , lambda o, e cascata o - , eram classificados como membros de diversos multipletos isotópicos (representações irredutíveis do grupo SU(2)), todas estas oito partículas passam a constituir um super-multipleto (representação irredutível do grupo SU(3)). Igualmente os mesons pseudo-escalares e vetoriais e também as ressonâncias fortes são classificadas em super-multipletos.

Se já a invariância de isospin é aproximada,com muito mais razão a invariância por SU(3), pois mesmo nas interações fortes, as partículas de um supermultipleto tem comportamento diferente.

O esquema semi-fênomenológico que é introduzido para tratar destas invariâncias aproximadas é o de considerar a hamiltoniana das partículas elementares como sendo esquemàticamente dada por

$$H = H_o + \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \lambda_3 H_3 \qquad (2)$$

$$1 > \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$$

onde H_o é perfeitamente simétrica sob SU(3) (super-forte) H_1 quebra a simetria por SU(3) (forte-usual), H_2 a simetria de isospin (electromagnética), H_3 viola também as simetrias discretas como P, C, PC, (fraca).

Através de hipóteses sôbre o comportamento de H_1, H_2, H_3 podemos obter informações sôbre os desvios da teoria a partir da simetria exata considerando a parte que viola a simetria como uma pequena perturbação.

De um ponto de vista estético, tal tratamento das simetrias aproximadas é bastante insatisfatório. Se a natureza demonstra predileção por certas simetrias, por que ao mesmo tempo conspira para violá-las?

Na formulação tradicional esta pergunta não tem sentido. As experiências revelam certas simetrias aproximadas e as constantes características da violação são simplesmente inseridas no formalismo.

Haverá outra maneira de formular o problema?

Baseando-se num resultado bastante familiar na teoria dos muitos corpos, de que o estado fundamental do sistema pode não exibir a simetria das equações básicas, Heisenberg [2] introduziu a noção de vácuo assimétrico.

Assim, embora as equações da teoria possam exibir uma simetria completa (por exemplo $H = H_0$ em (1)) as violações da simetria que observamos seriam devidas à assimetria do vácuo.

Em outras palavras a correspondência

$$\phi \rightarrow \phi_T \qquad (3)$$

O que é ϕ_T

deixa invariantes as regras de comutação e leis de movimento mas não existe um operador unitário T tal que

$$\begin{aligned} \phi_T &= T\,\phi\,T^{-1} \\ T|0\rangle &= |0\rangle \end{aligned} \qquad (4)$$

Temos neste caso o que se convencionou chamar de "quebra espontânea de simetria". Anàlogamente ao que acontece no problema de muitos corpos a violação de uma simetria seria determinada pela dinâmica do sistema e não imposta arbitràriamente.

No caso de um cristal por exemplo, partimos de uma equação de Schrödinger translacionalmente invariante, mas o estado fundamental do sistema não é invariante por translações. O fato de termos um cristal e não um líquido ou gás é em princípio determinado pelas forças intermoleculares. Temos assim uma típica situação de quebra espontânea da simetria translacional do sistema, que tem como consequência não ser o momentum linear do sistema exatamente conservado. Podemos com efeito ter um espalhamento elástico de neutrons ou raios X pelo cristal (difração de Bragg) que absorve momentum sem se alterar (no limite de um cristal infinito).

O ferromagneto representa um outro exemplo de quebra espontânea de simetria, no caso a invariância por rotações.

É claro que nestes casos o estado fundamental do sistema não pode ser unìvocamente determinado a partir das equações básicas. É necessário especificar também as coordenadas de uma célula cristalina ou a direção de magnetização respectivamente. Em teoria dos campos isto significaria dar uma "condição inicial de universo" que caracterizaria o vácuo das partículas elementares. Por isso as teorias de quebra espontânea de simetria são também chamadas de teorias com vácuo degenerado.

Uma profunda análise de R. Haag [3] mostrou que tanto no caso de meios materiais infinitos como na teoria relativística dos campos um formalismo com vácuo degenerado equivale a trabalhar com uma representação redutível da álgebra de operadores de campo. É possível então se restringir a sòmente um setor correspondente a uma representação irredutível contendo no máximo um vácuo. As diversas representações pertencentes aos vários setores são unitàriamente inequivalentes, em particular não existem operadores de campo que levam o vácuo de um setor no vácuo de outro.

Isto pode ser entendido intuitivamente no caso de um cristal infinito, pois dois estados fundamentais que diferem por uma translação $\underline{\ell}$ não podem ser obtidos, um a partir do outro, por um número finito de operações.

Examinemos ainda no caso do cristal uma importante consequência da quebra espontânea de simetria.

Tomemos uma excitação (fonon) de grande comprimento de onda. Se as forças intermoleculares forem de curto alcance, no limite $k \to 0$ tudo se passará como se o cristal estivesse transladado e portanto não deverá haver energia alguma associada a esta excitação. Com efeito sabemos que $\omega(\underline{k}) = v\,|\underline{k}|$ e portanto $\omega(\underline{k}) \to 0$ quando $k \to 0$. Da mesma forma para um ferromagneto temos ondas de spin cuja energia vai a zero com o vetor de propagação e que podem ser entendidas como uma rotação do meio material como um todo.

O resultado análogo na teoria relativística dos campos é o chamado Teorema de Goldstone [4,5] que prevê a existência de partículas de massa zero associadas à quebra espontânea de uma simetria contínua.

A idéia básica do teorema pode ser vista da seguinte maneira:

Tomando a lei de conservação local

$$\frac{\partial j^{\mu}(x)}{\partial x^{\mu}} = 0 \quad (5)$$

o que é j^{μ}

associada a uma invariância contínua, obtemos

$$\frac{d}{dt} Q(t) = \frac{d}{dt} \int j^{o}(x,t) d^{3}x = 0 \quad (6)$$

e portanto

$$[\, P_{\mu} \,,\, Q \,] = 0 \quad (7)$$

Considerando o "estado" $Q\,|o\rangle$ que no caso da simetria ser espontaneamente quebrada é diferente de zero, temos com (7)

$$P_{\mu}\, Q\, |o\rangle = Q\, P_{\mu}\, |o\rangle = 0 \quad (8)$$

o que sugere a existência de um estado cuja energia tende a zero com o momentum, logo de massa zero. Numa teoria relativística quando j^{μ} transforma-se como um quadri-vetor êste estado tem que ter spin zero pois $\langle p,s \mid j^{\mu} \mid o\rangle = 0$, quando $p^{2} = o$ a não ser que $s = 0$, sendo a métrica positiva definida no espaço de Hilbert.

Da maneira como foi originalmente formulado o teorema de Goldstone é eminentemente negativo pois o preço que pagamos por uma quebra espontânea de simetria dentro do esquema usual da teoria dos campos é a predição de partículas de massa zero e spin zero jamais observadas. Uma argumentação que procura salvar a situação conjecturando que estas partículas são acopladas muito fracamente à matéria não nos parece convincente porque :

1 - É de esperar que o acoplamento destas partículas com a matéria seja da mesma ordem de grandeza que a violação da simetria.

2 - Num esquema de quebra espontânea de SU(3) ou SU(2) algumas destas partículas terão carga e e darão contribuição dominante à polarização do vácuo alterando macroscòpicamente a lei de Coulomb.

De positivo, o problema das simetrias espontaneamente quebradas focaliza a atenção para o fato de que uma simetria puramente algébrica (eq. 3) que deixa invariantes as equações de movimento e regras de comutação não implica necessàriamente a existência de um operador unitário T satisfazendo a (4), contrariando o que é muitas vezes implìcitamente assumido na teoria dos campos.

No Capítulo II mostraremos que numa teoria relativística com um espectro de massas que tem um vazío (gap) entre o vácuo e o hiperboloide de massa mais baixa uma invariância contínua no sentido da eq. (3) tem como consequência a existência de um T unitário satisfazendo a (4).

No Capítulo III obteremos um resultado mais forte, provando que as conclusões do Cap. II são válidas desde que o espectro de energia-momentum não tenha uma singularidade $\delta(x^2)$ no cone de luz, tirando como trivial corolário uma demonstração geral do Teorema de Goldstone.

No Capítulo IV os métodos desenvolvidos no Cap. II serão extendidos a teorias não relativísticas de muitos corpos e dando ênfase à quebra espontânea da invariância de Galileu informações sôbre o espectro de energia de um sistema de muitos corpos serão obtidas.

Discussões prévias sôbre as questões aquí estudadas e referências adicionais podem ser encontradas em [6,7,8,9].

II - Quebra Espontânea de Simetrias em Teorias Relativísticas

1. Formulação do Problema

Formularemos a teoria relativística de campos quantizados em termos dos polinômios locais de Wightman [10] associados a uma região $\mathcal{O}$ finita e arbitrária do espaço-tempo

$$A = \sum_{(n)} \int\int f^{(n)}_{i_1 \ldots i_n}(x_1 \ldots x_n)\, \phi_{i_1}(x_1) \ldots \phi_{i_n}(x_n)\, d^4x_1 \ldots d^4x_n \qquad (9)$$

onde os $\phi_i(x)$ são os campos básicos da teoria e $f^{(n)}$ funções suficientemente contínuas que se anulam fora da região $\mathcal{O}$.

Necessitaremos também de polinômios de classe $\wedge$ definidos como

$$A_\wedge = \int f_\wedge(x)\, A(x)\, d^4x \qquad (10)$$

com

$$\lim_{R \to \infty} R^r \int_{(\underline{x}^2+t^2) > R^2} |f_\wedge(x)|\, d^4x = 0$$

onde $A(x)$ é o transladado por x do polinômio local A, e de classe S

$$A_S = \int f_S(x)\, A(x)\, d^4x \qquad (11)$$

$$\lim_{R \to \infty} R^N \int_{(\underline{x}^2+t^2) > R^2} |f_S(x)|\, d^4x = 0 \text{ para todo } N.$$

Conforme foi exposto na Introdução uma simetria é no seu nível mais básico uma correspondência

$$A \to A_T \qquad (12)$$

que deixe invariantes as regras de comutação e leis de movimento da teoria. Esta correspondência deve satisfazer as seguintes relações

$$(\alpha A^{(1)} + \beta A^{(2)})_T = \alpha A_T^{(1)} + \beta A_T^{(2)}$$
$$(A^{(1)} A^{(2)})_T = A_T^{(1)} A_T^{(2)} \qquad (13)$$
$$(A^x)_T = (A_T)^x$$

correspondendo ao que os matemáticos chamam de automorfismo de uma álgebra.

Fìsicamente relevantes são os automorfismos locais que levam um operador associado a uma região finita $\mathcal{O}$ num operador associado à região finita $\mathcal{O}_T$ de tal forma que se $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$ estão em regiões causalmente independentes $\mathcal{O}_{1T}$ e $\mathcal{O}_{2T}$ também estarão uma fora do cone de luz da outra. [11].

A representação dos polinômios locais como operadores num espaço de Hilbert é determinada pelas funções de Wightman [10] (valôres esperados no vácuo)

$$W(A) = \langle o|A|o\rangle \qquad (14)$$

O problema central é o de saber se no espaço de Hilbert determinado pela representação (14) existe um operador unitário T tal que

$$T A T^{-1} = A_T \qquad (15a)$$

e

$$T|0\rangle = |0\rangle \qquad (15b)$$

Analisaremos êste problema para o caso de simetrias contínuas associadas a uma lei de conservação local.

Para simplificar o tratamento abordaremos aquí sòmente as simetrias internas, isto é, aquelas que atuam sôbre os índices (i) dos campos $\phi_i(x)$.

A generalização de nossos resultados para simetrias contínuas arbitrárias é possível, e foi obtida dentro da formulação algébrica de Haag e Kastler [12] na referência [13] . (vêr também [11]).

As seguintes hipóteses caracterizarão a natureza relativística da teoria.

1 - Comutatividade local

$$[\, A^{(1)}(\mathcal{O}_1),\ A^{(2)}(\mathcal{O}_2)\,]_{\pm} = 0 \qquad (16a)$$

quando $\mathcal{O}_1$ estiver fora do cone de luz de $\mathcal{O}_2$.

2 - Existência de operadores unitários U(x) correspondentes a translações espaço-temporais tais que

$$U(x)\, A\, U^{-1}(x) = A(x) \qquad (16b)$$

Não necessitaremos no que segue de supor a existência de operadores correspondentes a transformações homogêneas de Lorentz.

A existência do "mass-gap" é traduzida pela hipótese:

3 - O operador U(x) admite a decomposição espectral [14]

$$U(x) = E_0 + \int e^{ipx}\, dE(p) \qquad (16c)$$

onde E_0 é o projetor sôbre o vácuo que supomos único sem perda de generalidade pois equivale a hipótese da irreducibilidade da álgebra de operadores locais [3,10] e dE(p) é o projetor sôbre estados de 4-momentum p sendo não nulo sòmente para

$$p^2 \geq m^2, \; p_0 > 0 \qquad (17)$$

Na formulação lagrangeana usual uma simetria contínua implica a existência de uma corrente conservada.

Tomamos aquí como hipótese a existência de 4 "operadores" hermitianos locais $j^\mu(x)$ satisfazendo a

4 - $$\frac{\partial j^\mu(x)}{\partial x^\mu} = 0 \qquad (18)$$

Para obter operadores bem definidos a partir de $j^\mu(x)$ devemos introduzir as quantidades

$$j^\mu(f) = \int f(x)\, j^\mu(x)\, d^4x \qquad (19)$$

Se a região $\mathcal{O}$ em que f é não nula fôr finita então

$$[\, j^\mu(f), A(\mathcal{O}')\,] = 0 \qquad (20)$$

para $\mathcal{O}'$ fora do cone de luz de $\mathcal{O}$.

A conexão entre a corrente conservada e o automorfismo correspondente à simetria contínua

$$A \rightarrow A_\tau \qquad (21)$$

será dada por

5 - $$\left.\frac{dA_\tau}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \underset{R > R_0}{i\,[\, j^0(g_d f_R), A\,]} \qquad (22)$$

onde $g_d(t)$ é uma função que se anula fora de um intervalo de largura d em tôrno da origem e

$$\int g_d(t)\, dt = 1 \qquad (23)$$

e $f_R(\underline{x})$ é uma função contínua e com derivadas de qualquer ordem contínuas tal que

$$\left.\begin{array}{l} f_R(\underset{\sim}{x}) = 1 \quad \text{para } |\underset{\sim}{x}| \leq R \\ f_R(\underset{\sim}{x}) = 0 \quad \text{para } |\underset{\sim}{x}| > R + \varepsilon \end{array}\right\} \quad (24)$$

e R_o é tal que os pontos

$$(t, \underset{\sim}{x}) \text{ tais que } \left\{\begin{array}{l} g(t) \neq 0 \\ |\underset{\sim}{x}| \geqslant R_o \end{array}\right\} \quad (25)$$

estejam fora do cone de luz da região $\mathcal{O}$ a qual A está associado.

Heurísticamente a hipótese 5 pode ser justificada lembrando-se de que formalmente a partir da lei de conservação (18) obtemos um "operador"

$$Q = \int j^o(\underset{\sim}{x}, t)\, d^3x \qquad (26)$$

que independe do tempo e também formalmente construimos um "operador unitário"

$$T(\tau) = e^{i\tau Q} \qquad (27)$$

definindo então

$$A_\tau = T(\tau)\, A\, T^{-1}(\tau) \qquad (28)$$

e a partir de (27) e (28) obteríamos

$$\left.\frac{dA_\tau}{d\tau}\right|_{\tau=0} = i\,[\,Q, A\,] \qquad (29)$$

Em virtude da comutatividade local (20) poderíamos na eq. (29) em lugar de Q usar uma integral de j^o sôbre um volume finito e suficientemente grande, isto é,

$$Q(V, t) = \int_V j^o(\underset{\sim}{x}, t)\, d^3x \qquad (30)$$

obtendo assim uma "carga local". Introduzindo também uma integração adicional no tempo para garantirmos que temos um operador bem definido $j^0(f_R g_d)$ passamos da relação formal dada por (29) para a equação (22). Embora esta última faça sentido, a existência ou não de um operador Q e portanto de um sentido preciso para a equação (29) não pode ser garantida a priori estando condicionada à simetria não ser espontâneamente quebrada.

Necessitamos ainda examinar a consistência da equação (22) mostrando que o membro à direita é independente das funções f_R e g_d para $R > R_0$.

A primeira parte é consequência trivial da comutatividade local pois

$$\underset{R > R_0}{[\, j^0\,(f_R\, g_d), A\,]} - \underset{R' > R_0}{[\, j^0\,(f'_{R'}, g_d),\, A\,]} = 0 \qquad (31)$$

uma vez que

$$f_R\,(\underset{\sim}{x}) = f'_{R'}\,(\underset{\sim}{x}) = 1 \quad \text{para} \quad |\underset{\sim}{x}| \leq R_0 \qquad (32)$$

e estes são os únicos pontos que contribuem para o comutador.

A independência com g_d é demonstrada tomando

$$\hat{g}\,(t) = \int_{-\infty}^{t} g_{d_1}(t') - g_{d_2}(t')\, dt' \qquad (33)$$

onde para fixar idéias supomos $d_1 > d_2$. Com (23) vemos que $\hat{g}(t)$ se anula fora de um intervalo de largura d_1 em tôrno da origem e

$$\frac{d}{dt}\,\hat{g}(t) = g_{d_1}(t) - g_{d_2}(t) \qquad (34)$$

e portanto usando também a lei de conservação (18) obtemos

$$j^0(f_R \frac{d\hat{g}}{dt}) = j^0(f_R\, g_{d_1}) - j^0(f_R\, g_{d_2}) = \underset{\sim}{j}\,(\underset{\sim}{\nabla}\, f_R\, \hat{g}) \qquad (35)$$

Como

$$\underset{\sim}{\nabla} f_R = 0 \quad \text{para } |\underset{\sim}{x}| < R \qquad (36)$$

temos por comutatividade local

$$[\underset{R > R_o}{\underset{\sim}{j}(\nabla f_R \hat{g}), A}] = 0 \qquad (37)$$

logo usando (35)

$$[\underset{R > R_o}{j^o(f_R\, g_{d_1}), A}] = [\underset{R > R_o}{j^o(f_R\, g_{d_2}), A}] \qquad (38)$$

o que mostra ser o comutador na eq. (22) independente da escolha das funções f_R e g_d com $R > R_o$.

No caso particular de simetrias internas êste comutador é dado por

$$[\underset{R > R_o}{j^o(f_R\, g_d), \phi_i(f)}] = M_{ij}\, \phi_j(f) \qquad (39)$$

com $\phi_i(f) = \int f(x)\, \phi_i(x)\, d^4x$

correspondendo ao automorfismo induzido por

$\phi(x) \rightarrow e^{i \tau M}\, \phi(x) \qquad (40)$

M sendo uma matriz que atua no espaço dos índices (i).

2 - <u>Três lemas sôbre valôres esperados no vácuo</u>

Demonstraremos agora 3 lemas preliminares com o auxílio dos quais provaremos o teorema central dêste capítulo.

<u>Lema A</u> - Para polinômios de classe n com $n \geq 2$ vale

$$\lim_{R \to \infty} \langle 0 |[j^o(f_R \frac{dg_d}{dt}), A_n]| 0 \rangle = 0 \qquad (41)$$

Demonstração - Com a equação (18) obtemos

$$\lim_{R \to \infty} \langle 0 | [\, j^0 (f_R \frac{d}{dt} g_d), A_n \,] | 0 \rangle = \lim_{R \to \infty} \langle 0 | [\, \underline{j} \, (\underline{\nabla} f_R \, g_d), A_n \,] | 0 \rangle \qquad (42)$$

e lembrando a definição (10) de A_n escrevemos

$$A_n = \int_{(\underline{x}^2 + t^2) > \frac{R^2}{4}} f_n (x) \, A \, (x) \, d^4x + \int_{(\underline{x}^2 + t^2) < \frac{R^2}{4}} f_n (x) \, A \, (x) \, d^4x \qquad (43)$$

A contribuição do último termo à **direita** na equação (43) ao comutador (42) será nula no limite $R \to \infty$ por comutatividade local. Portanto

$$\lim_{R \to \infty} \langle 0 | [\, j^0 (f_R \frac{d}{dt} g_d), A_n \,] | 0 \rangle = \qquad (44)$$

$$= \lim_{R \to \infty} \int d^3x' dt' \, \underline{\nabla} f_R (\underline{x}') g_d (t') \int_{(\underline{x}^2 + t^2) > \frac{R^2}{4}} d^4x \, f_n (\underline{x}) \langle 0 | [\, \underline{j}(x'), A(x) \,] | 0 \rangle$$

Como

$$\langle 0 | \, j \, (x') \, A(x) \, | 0 \rangle \xrightarrow[x' - x \to \infty]{} \langle 0 | \, j \, (x') | 0 \rangle \langle 0 | A(x) | 0 \rangle = 0 \qquad (45)$$

e

$$\underline{\nabla} f_R \, (\, \underline{x} \,) = 0 \quad \text{para} \quad |\underline{x}| < R \quad \text{e} \quad |\underline{x}| > R + \epsilon \qquad (46)$$

obtemos de (44) a majorização

$$\lim_{R \to \infty} | \langle 0 | [\, j^0 (f_R \frac{d}{dt} g_d), A_n \,] | 0 \rangle | \leq c R^2 \int_{(\underline{x}^2 + t^2) > \frac{R^2}{4}} d^4x \, | f_n (x) | \qquad (47)$$

onde c é uma constante que depende de A.

Vemos com (47) e (10) que para $n > 2$ o lema está demonstrado.

Sob certas condições êste lema pode ser extendido para $n \geq 0$ mas não para polinômios arbitrários [13] . Sòmente se o polinômio fôr suficientemente localizado valerá a equação (41).

<u>Lema B</u> - Para cada polinômio A_n existe um A'_n tal que

$$\{ A_n - \langle 0| A_n |0\rangle \} |0\rangle = P^0 A'_n |0\rangle \qquad (48)$$

$$\{ A^x_n - \langle 0| A^x_n |0\rangle \} |0\rangle = P^0 A'^x_n |0\rangle \qquad (49)$$

onde P^0 é o operador de energia

Demonstração - Definindo

$$\bar{A}_n = A_n - \langle 0| A_n |0\rangle \qquad (50)$$

vemos que

$$\bar{A}_n (t)|0\rangle = U(t)\, \bar{A}_n |0\rangle = \int \tilde{\bar{A}}_n (\omega) e^{-i\omega t} d\omega\, |0\rangle \qquad (51)$$

$$\bar{A}^x_n (t)|0\rangle = U(t)\, \bar{A}^x_n |0\rangle = \int \tilde{\bar{A}}^x_n (-\omega) e^{-i\omega t} d\omega\, |0\rangle \qquad (52)$$

onde usando a hipótese de "mass-gap" (17) e

$$\langle 0| \bar{A}_n |0\rangle = \langle 0| \bar{A}^x_n |0\rangle = 0 \qquad (53)$$

temos que

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{\bar{A}}_n (\omega)|0\rangle = 0 \quad \text{para} \quad \omega < m \\ \tilde{\bar{A}}^x_n (\omega)|0\rangle = 0 \quad \text{para} \quad \omega > - m \end{array}\right\} \qquad (54)$$

Introduzindo agora a função

$$u(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{u}(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega \qquad (55)$$

Com $\tilde{u}(\omega)$ uma função contínua e com derivadas de qualquer ordem contínuas tal que

$$\tilde{u}(\omega) = \frac{1}{\omega} \quad \text{para } |\omega| \geq m \qquad (56)$$

e definindo

$$A' = \int u(t)\, \bar{A}_n(t)\, dt \qquad (57)$$

obtemos

$$iP^0 A'|0\rangle = \int u(t) \frac{d\bar{A}_n}{dt}(t)\, dt|0\rangle = \int -i\,\omega\,\tilde{u}(\omega)\tilde{\bar{A}}_n(\omega)d\omega\,|0\rangle \qquad (58)$$

e

$$iP^0 A'^x|0\rangle = \int -i\,\omega\,\tilde{u}^x(-\omega)\,\tilde{\bar{A}}^x_n(-\omega)|0\rangle\, d\omega \qquad (59)$$

Usando (54) e (56) vemos que

$$iP^0 A'|0\rangle = \int \tilde{\bar{A}}_n(\omega)\, d\omega|0\rangle = \bar{A}_n\,|0\rangle \qquad (60)$$

$$iP^0 A'^x|0\rangle = \int \tilde{\bar{A}}^x_n(-\omega)\, d\omega\,|0\rangle = \bar{A}^x_n|0\rangle \qquad (61)$$

Como $\tilde{u}(\omega)$ é uma função contínua e com derivadas de qualquer ordem contínuas sabemos que sua transformada de Fourier satisfaz a

$$\lim_{t\to\infty} t^n\, u(t) = 0 \quad \text{para todo } n\,. \qquad (62)$$

Lembrando agora a definição de A_n (10) e de A' (57)

$$A' = \int u(t')\, f_n(t-t', \underline{x})\, \bar{A}(x)\, d^4x\, dt' \qquad (63)$$

A' será em virtude de (62) um polinômio de classe n isto é

$$\begin{aligned} A' &= A'_n \\ A'^x &= A'^x_n \end{aligned} \qquad (64)$$

Com

$$\lim_{R\to\infty} R^n \int\limits_{(x^2+t^2)>R^2} |f_n(t-t', x)\, u(t')\, dt'dt\, dx = 0 \qquad (65)$$

o que conclui a demonstração do lema.

<u>Lema C</u> - Para qualquer polinômio A_n de classe $n \geq 2$ vale

$$\lim_{R\to\infty} \langle 0|[\,j^0(f_R\, g_d), A_n]|0\rangle = 0 \qquad (66)$$

Demonstração - Como podemos tomar sem perda de generalidade

$$\langle 0|j^o(x)|0\rangle = 0 \qquad (67)$$

temos

$$\langle 0|\,[\,j^o(f_R\,g_d),\,A_\alpha\,]\,|0\rangle = \langle 0|\,[\,j^o(f_R\,g_d),\,\bar{A}_\alpha\,]\,|0\rangle \qquad (68)$$

onde $\bar{A}_\alpha$ está definido em (50),

$$\bar{A}_\alpha = A_\alpha - \langle 0|\,A_\alpha\,|0\rangle \qquad (50)$$

Pelo lema B sabemos que

$$\langle 0|\,[\,j^o(f_R\,g_d),\,\bar{A}_\alpha\,]\,|0\rangle = \langle 0|\,j^o(f_R\,g_d)\,P^o\,A' \; + A'\;P^o\,j^o(f_R\,g_d)|0\rangle \qquad (69)$$

e com

$$\frac{d}{dt}j^o(x) = \frac{1}{i}\,[\,j^o(x),\,P^o\,]$$

$$j^o(f_R\,\frac{d\,g_d}{dt}) = i\,[\,j^o(f_R\,g_d),\,P^o\,] \qquad (70)$$

obtemos a partir de (69) e (68)

$$\langle 0|\,[\,j^o(f_R\,g_d),\,A_\alpha\,]\,|0\rangle = -i\,\langle 0|\,[\,j^o(f_R\,\frac{d}{dt}\,g_d),A'_\alpha\,]\,|0\rangle \qquad (71)$$

Empregando agora o resultado do lema A

$$\lim_{R\to\infty}\;\langle 0|\,[\,j^o(f_R\,\frac{d}{dt}\,g_d),\,A'_\alpha\,]\,|0\rangle = 0 \quad \text{para } \alpha \geq 2 \qquad (72)$$

obtemos com (71) a demonstração desejada.

Uma pequena modificação dos lemas B e C levará a

$$\lim_{R\to\infty}\;\langle 0|\,[\,j^o(f_R\,g_d),\,A_\alpha\,]_+\,|0\rangle = 0 \quad \text{para } \alpha \geq 2 \qquad (73)$$

onde $[\quad]_+$ indica o anticomutador e juntando as equações (66) e (73) obtemos

$$\lim_{R \to \infty} \langle 0 | j^o(f_R\, g_d)\, A_\eta\, | 0 \rangle = 0$$
$$\text{para} \quad \eta \geqslant 2 \qquad (74)$$
$$\lim_{R \to \infty} \langle 0 | A_\eta\, j^o(f_R\, g_d)\, | 0 \rangle = 0$$

Aplicam-se as equações (66), (73) e (74) à observação que fizemos ao fim da demonstração do lema A; sob certas condições é possível extender nossos resultados para $\eta \geqslant 0$. Para o que segue, contudo, necessitaremos sòmente de (66) para polinômios locais A. Neste caso em virtude da comutatividade local (66) pode ser escrita como

$$\langle 0 | [\, j^o(f_R\, g_d),\, A\,]\, | 0 \rangle = 0 \qquad (75)$$
$$R > R_o$$

3 - Invariância da teoria

Demonstraremos nesta secção o teorema central dêste Capítulo.

Teorema - Numa teoria relatívisticamente invariante satisfazendo as hipóteses 1 a 5 existe um operador unitário $T(\tau)$ tal que

$$T(\tau)\, A\, T^{-1}(\tau) = A_\tau \qquad (76)$$
$$T(\tau) = e^{i\tau Q} \qquad (77)$$
$$T(\tau)\, | 0 \rangle = | 0 \rangle \qquad (78)$$

onde

$$A \to A_\tau \qquad (79)$$

é o automorfismo correspondente à simetria da teoria.
Provaremos êste teorema mostrando a existência do operador Q dado por (77) e construindo a seguir o operador $T(\tau)$.

Vamos definir o operador Q atuando sôbre um conjunto de vetores denso no espaço de Hilbert, obtido pela aplicação de polinômios locais sôbre o vácuo [10]

$$\{ |A\rangle \} = \{ A|0\rangle \} \qquad (80)$$

da seguinte maneira

$$Q\,|0\rangle \overset{\text{def.}}{=} 0 \qquad (81)$$

$$Q\,A|0\rangle \overset{\text{def.}}{=} \underset{R > R_0}{[\, j^0(f_R\, g_d),\, A\,]}\, |0\rangle \qquad (82)$$

Notemos que (81) está contida em (82) já que o operador unidade é um operador local associado a qualquer região.

Para verificar a consistência interna de (82) precisamos mostrar que se

$$A\,|0\rangle = B\,|0\rangle \qquad (83)$$

com A e B dois polinômios locais então

$$Q\,A|0\rangle = Q\,B|0\rangle \qquad (84)$$

e que a equação (82) é independente de $f_R\, g_d$. A segunda parte é consequência imediata de (31) e (38). Para mostrar que (83) implica em (84) tomemos

$$Q\,A|0\rangle - Q\,B|0\rangle = \underset{R\to\infty}{[\, j^0(f_R\, g_d),\, A-B\,]}\, |0\rangle = \underset{R\to\infty}{(A-B)\, j^0(f_R g_d)|0\rangle} \qquad (85)$$

onde na última passagem fizemos uso de (83).

Tomando agora o produto escalar de ambos os membros de (85) com um vetor arbitrário $C|0\rangle$ onde C é local obtemos

$$\langle C|\, (Q\,|A\rangle - Q\,|B\rangle) = \underset{R\to\infty}{\langle 0|C^+\, (A-B\; j^0(f_R\, g_d)|0\rangle} =$$

$$= \underset{R\to\infty}{\langle 0|\, [\, C^+(A-B),\, j^0(f_R\, g_d)\,]\, |0\rangle} \qquad (86)$$

Fazendo uso do lema C provado na secção anterior (eq.66) encontramos

$$\langle C|(Q|A\rangle - Q|B\rangle) = 0 \qquad (87)$$

e como $|C\rangle = C|0\rangle$ pertencem a um conjunto denso no espaço de Hilbert provamos (84) a partir de (83). Numa teoria Lorentz invariante poderíamos ter empregado uma demonstração mais simples baseada no Teorema de Federbush-Johnson [15] que assegura que (83) com A e B locais implica em A = B. Nossa prova contudo aplica-se também a teorias não relativísticas desde que a eq. (66) seja satisfeita, resultado êste que empregaremos no Cap.IV.

Tendo mostrado a univocidade da definição (82) mostremos agora que o operador Q assim definido é linear e hermitiano entre vetores do conjunto dado por (80). A linearidade é óbvia da própria estrutura da eq. (82) a hermiticidade é demonstrada tomando

$$\begin{aligned}\langle B|Q|A\rangle &= \langle 0|B^+[\, j^o(f_R\, g_d), A\,]\,|0\rangle = \\ & \qquad\quad {\scriptstyle R\to\infty} \\ &= +\,\langle 0|\,[\,B^+, j^o(f_R\, g_d)\,]\,A\,|0\rangle \\ & \qquad\qquad {\scriptstyle R\to\infty} \\ &\quad +\,\langle 0|\,[\,j^o(f_R\, g_d), B^+A\,]|0\rangle \qquad (88) \\ & \quad {\scriptstyle R\to\infty}\end{aligned}$$

Com (66) o segundo termo à direita na equação (88) é nulo e temos

$$\langle B|Q|A\rangle = \overline{\langle A|Q|B\rangle} \qquad (89)$$

o que mostra a hermiticidade de Q .

O operador hermitiano Q definido através de (82) corresponde ao gerador infinitesimal da simetria associada à cor -

rente conservada. Para obter o operador correspondente à transformação finita $T(\tau)$, precisamos tomar a exponencial de Q (eq. 77). Como o operador Q não é limitado a exponencial estará unìvocamente determinada se e sòmente se Q definido sôbre o conjunto de vetores (80) fôr essencialmente auto-adjunto [10, 14]. Para verificar esta propriedade, que é mais do que a simples hermiticidade já provada, no caso geral, exige métodos de grande sofisticação matemática. Este problema foi contornado em [13] trabalhando diretamente com as transformações finitas. No caso de simetrias internas contudo, é possível definir a exponencial em termos de uma expansão em série de potências que é o que faremos a seguir.

Definamos inicialmente o operador $T(\tau)$ atuando sôbre um vetor obtido pela aplicação de um polinômio local de 1º grau sôbre o vácuo como sendo,

$$T(\tau)\, \phi_i\,(f)|0\rangle \overset{\text{def}}{=} \lim_{N \to \infty} \sum_{n=o}^{N} \frac{(i\,\tau\, Q)^n}{n!}\, \phi_i(f)|0\rangle \qquad (90)$$

e com (39) e (82) obtemos

$$T(\tau)\, \phi_i\,(f)|0\rangle = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=o}^{N} \frac{(i\,\tau)^n}{n!}\,(M^n)_{ij}\, \phi_j\,(f)\,|0\rangle \qquad (91)$$

Para que o limite em (91) exista é necessário que seja satisfeito o critério de Cauchy

$$\Big\| \sum_{\substack{n=No \\ No, N \to \infty}}^{N} \frac{(i\,\tau)^n}{n!}\,(M^n)_{ij}\, \phi_j\,(f)\,|0\rangle \Big\| \to 0 \qquad (92)$$

ou seja usando a desigualdade de Schwartz basta mostrar que

$$\Big|\sum_{\substack{n=No\\ No,N\to\infty}}^{N} \frac{(i\tau)^n}{n!}(M^n)_{ij}\Big| \to 0 \qquad (93)$$

Como a matriz M atua num espaço de dimensão finita (93) é consequência da teoria elementar de matrizes, isto é

$$\Big|\sum_{\substack{n=No\\ No,N\to\infty}}^{N} \frac{(i\tau)^n}{n!}(M^n)_{ij}\Big| \leq \sum_{\substack{n=No\\ No,N\to\infty}}^{N} \frac{(|\tau|)^n}{n!} d^{n-1} m^n \to 0 \qquad (94)$$

onde m é máximo dos valôres absolutos dos elementos da matriz M e d é a dimensão da matriz.

Temos assim que

$$T(\tau)\, \phi_i(f)|0\rangle = (e^{i\tau M})_{ij}\, \phi_j(f)\,|0\rangle = (\phi_i(f))_\tau\,|0\rangle \qquad (95)$$

A extensão de (90), (95) para um polinômio local de ordem arbitrária é trivial dando

$$T(\tau)\, A\,|0\rangle = A_\tau\,|0\rangle \qquad (96)$$

de onde tiramos como caso particular

$$T(\tau)|0\rangle = |0\rangle \qquad (97)$$

Da hermiticidade de Q (89) e da definição de $T(\tau)$ pela série de potências (90) obtemos

$$(T(\tau)\,B|0\rangle\ ,\ T(\tau)\,A|0\rangle) = \langle 0|\, B^+_\tau A_\tau\,|0\rangle =$$
$$= \langle 0|\,(B^+A)_\tau\,|0\rangle = \langle 0|\,B^+A|0\rangle = (B|0\rangle\ ,\ A|0\rangle) \qquad (98)$$

para A e B polinômios locais arbitrários.

Conseguimos assim definir um operador $T(\tau) = e^{i\tau Q}$ atuando no conjunto denso de vetores (80) segundo (96) e satisfazendo à (98)

Por continuidade êste operador pode ser extendido a um operador unitário atuando em todo o espaço de Hilbert pois qualquer vetor $|\psi\rangle$ pode ser escrito como

$$|\psi\rangle = \lim_{i \to \infty} A_i |0\rangle \qquad (99)$$

onde os A_i são locais. Definindo

$$T(\tau)|\psi\rangle = \lim_{i \to \infty} T(\tau) A_i|0\rangle \qquad (100)$$

temos que o limite em (100) existe pois

$$\| T(\tau) A_i|0\rangle - T(\tau) A_j|0\rangle \| = \| A_i|0\rangle - A_j|0\rangle \| \underset{i,j \to \infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (101)$$

onde uso foi feito de (98) e o do fato de que o limite (99) exis te. O operador definido em (100) é unitário pois

$$(T(\tau)|\psi\rangle , T(\tau)|\emptyset\rangle) = \lim_{i,j \to \infty} (T(\tau) A_i|0\rangle , T(\tau) B_j|0\rangle) =$$

$$= \lim_{i,j \to \infty} (A_i|0\rangle , B_j|0\rangle) = (|\psi\rangle , |\emptyset\rangle) \qquad (102)$$

onde usamos (99) e (98).

É facil verificar que $T(\tau)$ assim definido, comuta com as translações espaço-temporais, como é de esperar para um operador que descreva simetrias internas.

Sendo A e B dois operadores locais arbitrários temos

$$T(\tau) A T^{-1}(\tau) B|0\rangle = T(\tau) A B_{-\tau} |0\rangle = A_{\tau} B|0\rangle \qquad (103)$$

donde concluimos

$$T(\tau) A T^{-1}(\tau) = A_{\tau} \qquad (104)$$

equação esta que é válida quando tomada sôbre o conjunto denso de vetores definido por (80).

Conseguimos assim mostrar a existência de um operador $T(\tau)$ satisfazendo à (76), (77) e (78) o que termina a demonstração do teorema.

As consequências usuais da existência do tal operador, como propriedades de invariância das funções de Wightman [10],

$$\langle 0|\, \phi\,(x_1) \dots \phi\,(x_n)|0\rangle = \langle 0|\, \phi\,(x_1) \dots \phi\,(x_n)|0\rangle \qquad (105)$$

das funções de Green, propriedades de transformação dos estados assintóticos etc., são fàcilmente obtidas a partir de (76), (77) e (78).

Para finalizar êste capítulo observemos que o fato de termos obtido a equação (74) sòmente para uma classe restrita de polinômios suficientemente localizados, parece indicar que mesmo nos casos em que existe um operador Q a relação

$$\langle\psi|Q|\,\phi\rangle = \lim_{V\to\infty} \langle\psi|\int j^o(x)\, d^3x\, |\phi\rangle \qquad (106)$$

não é válida para vetores $|\psi\rangle$, $|\phi\rangle$ arbitrários. Com efeito já no caso trivial da teoria livre de um campo escalar complexo podemos construir um estado de duas partículas [16],

$$|2\rangle = \int f\,(k_1,k_2)\, \frac{(k_1+k_2)\,(k_1-k_2)}{(k_1+k_2)^2}\, d^3k_1\, d^3k_2\, a^+(k_1)\, b^+(k_2)|0\rangle \qquad (107)$$

e tomando $f(k_1, k_2)$ contínua e maior ou igual a zero o estado $|2\rangle$ pode ser normalizado

$$\langle 2|2\rangle = 1 \qquad (108)$$

mas

$$\langle 2|Q|0\rangle = 0 \neq \lim_{V\to\infty} \langle 2|\int \rho(x,0)\, d^3x\, |0\rangle \qquad (109)$$

onde Q e ρ são os operadores de carga e densidade de carga resp. numa teoria livre.

A interpretação física dêste resultado aparentemente paradoxal é simples: numa teoria relativística o operador $\int_V j^0(x)\, d^3x$ aplicado ao vácuo cria flutuações na fronteira do volume v que aumentam com a superfície desta fronteira $V^{2/3}$.

Considerando um estado $|\psi\rangle$ descrito por uma "função de onda" $\psi(x)$ devemos ter

$$\langle\psi| \int_V j^0(x,0)\, d^3x\, |0\rangle \approx \bar{\psi}(R)\, R^2 \qquad (110)$$

onde R é o "raio" do volume V . Basta portanto que

$$\psi(x) \approx R^{-2+\epsilon} \quad , \quad \epsilon > 0 \qquad (111)$$

para obter um resultado diferente de zero em (110).
Por outro lado para que o vetor $|\psi\rangle$ seja normalizável é necessário que

$$\int \bar{\psi}(x)\, \psi(x)\, d^3x = \text{finita} \Rightarrow \psi(x) \approx R^{-\frac{3}{2}-\epsilon} \quad \epsilon > 0 \qquad (112)$$

As condições (111) e (112) são compatíveis mostrando que existem vetores $|\psi\rangle$ e $|\emptyset\rangle$ ($|\emptyset\rangle$ no caso é o vácuo) para os quais (106) não é válida.

Vemos assim que a equação

$$Q = \int j^0(x)\, d^3x \qquad (113)$$

possui no máximo um certo valôr heurístico devendo ser substituida pela eq. (22) que equivale à

$$[\, Q,A \,] = \Big[\lim_{R > R_0} \int_V j^0(x)\, d^3x,\ A \,\Big] \qquad (114)$$

III - O Teorema de Goldstone

No capítulo anterior mostramos que a partir de um automorfismo associado a uma corrente local conservada concluíamos numa teoria relativística com "mass-gap" a existência de um operador unitário de simetria com as propriedades usuais.

Sob as mesmas hipóteses que no Cap. II obteremos aquí um resultado mais forte: o operador unitário existirá desde que o espectro de massas não tenha uma singularidade $\delta(x^2)$ no cone de luz. Isto significa que a quebra espontânea de uma simetria contínua sòmente é possível se existirem estados discretos de massa zero na teoria. Este resultado se aproxima mais do que é usualmente entendido por Teorema de Goldstone [4] do que a simples existência de um "mass-gap" obtida anteriormente.

Na nossa demonstração empregaremos uma técnica semelhante à usada em [5] com a diferença que não faremos uso de operadores covariantes valendo os nossos resultados para valôres esperados arbitrários.

Usando as hipóteses 1,2,4,5 do Cap. II e substituindo 3 por

3' - O operador U(x) admite a decomposição espectral

$$U(x) = E_0 + \int e^{ipx} \, dE(p) \qquad (16c)$$

com E_0 o projetor sôbre o vácuo e $dE(p)$ sendo não nulo sòmente para

$$p^2 \geqslant 0, \; p_0 > 0 \qquad (115)$$

demonstremos em lugar do lema C o seguinte [17]

Teorema -

$$\lim_{R \to \infty} \langle 0 | [\, j_0 (f_R, t), A \,] | 0 \rangle = 0 \qquad (116)$$

para qualquer polinômio local A a não ser que existam estados discretos de massa zero na teoria, ou seja, estados $|a\rangle$ com $P^2 |a\rangle = 0$ e que sejam ligados ao vácuo pelo operador j^μ

$$\langle a | j^\mu | 0 \rangle \neq 0 \qquad (117)$$

Omitiremos aquí para simplificar a notação a integração de $j_0(x)$ sôbre o tempo usada no capítulo anterior e que pode ser reintroduzida em qualquer estágio sem alterar as nossas conclusões.

Uma vez provado êste teorema, aplicando o teorema central do Capítulo II, concluimos que na ausência de estados discretos de massa zero a simetria não pode ser espontâneamente quebrada, isto é, existe o operador $T(\tau)$ satisfazendo a (76), (77), (78).

Demonstração do Teorema - Em virtude da comutatividade local e da hipótese 3' (eq. 115) podemos escrever uma representação de Jost-Lehmann-Dyson [18] para o comutador

$$\langle 0 | [\, j_0 (\underline{x}, t), A \,] | 0 \rangle = \int_0^\infty d\varkappa^2 \int d^3y \; \Delta(\underline{x} - \underline{y}, t, \varkappa^2)\, \rho_1(\varkappa^2, \underline{y}) + \int_0^\infty d\varkappa^2 \int d^3y \; \frac{\partial}{\partial t} \Delta(\underline{x} - \underline{y}, t, \varkappa^2)\, \rho_2(\varkappa^2, \underline{y}) \qquad (118)$$

Em (117) $\rho_1(\varkappa^2, \underline{y})$ e $\rho_2(\varkappa^2, \underline{y})$ possuem suporte compacto D em $\underline{y}$ independente de $\varkappa^2$ em virtude da comutatividade de A com $j_0(\underline{x},t)$ para separações do gênero espaço suficientemente grandes.

Podemos escrever $(i = 1,2)$

$$\rho_i(\varkappa^2, \underline{y}) = \bar{\rho}_i^{3}(\varkappa^2)\, \delta^3(\underline{y}) + \nabla \cdot \sigma_i(\varkappa^2, \underline{y}) \qquad (119)$$

onde $\sigma_i(\varkappa^2,\underline{y})$ também possui suporte compacto na variável $\underline{y}$.
Para verificar (118) observemos que

$$\sigma^{(1)}(\varkappa^2, \underline{y}) = \int^{y_1} \Big\{ \rho(\varkappa^2, y_1' \, y_2 \, y_3) - \delta(y_1') \int \rho(\varkappa^2, y_1'' \, y_2 \, y_3) \, dy_1'' \Big\} \, dy_1' \qquad (120)$$

possui suporte compacto e que

$$\rho(\varkappa^2, \underline{y}) = \delta(y_1) \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\varkappa^2, y_1' \, y_2 \, y_3) \, dy_1' + \frac{\partial \sigma^{(1)}}{\partial y_1} \qquad (121)$$

Repetindo o argumento acima para o coeficiente de $\delta(y_1)$ com relação às coordenadas y_2 e y_3 obteremos (119). Inserindo (118) e (119) no termo à esquerda da equação (116) a contribuição de $\nabla \sigma$ se anula para R suficientemente grande em virtude do fato de $\Delta(x, \varkappa^2)$ ser zero fóra do cone de luz. Portanto para R suficientemente grande $(R > R_o(t))$

$$\langle 0 | [\, j_o(f_R,t), A \,] \, | 0 \rangle = \int_0^{\infty} d\varkappa^2 \int d^3x \, f_R(x) \Big\{ \bar{\rho}_1(\varkappa^2)\, \Delta(x,t,\varkappa^2) + \bar{\rho}_2(\varkappa^2) \frac{\partial}{\partial t} \Delta(x,t,\varkappa^2) \qquad (122)$$

Por outro lado sabemos que (vide lema A no cap. II) para $R > R_o(t)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle 0 | [\, j_o(f_R,t), A \,] \, | 0 \rangle = 0 \qquad (123)$$

para qualquer t finito. Inserindo (122) em (123) obtemos as seguintes relações que tem que ser satisfeitas pelas funções

$\bar{\rho}_1(\varkappa^2)$ idênticamente em t (como relações para distribuições temperadas)

$$\int_0^\infty \bar{\rho}_1(\varkappa^2) \cos \varkappa t \, d\varkappa^2 = 0$$
$$\int_0^\infty \bar{\rho}_2(\varkappa^2) \operatorname{sen}(\varkappa t)\varkappa \, d\varkappa^2 = 0 \qquad (124)$$

Isto implica

$$\bar{\rho}_2(\varkappa^2) = \lambda \delta(\varkappa^2)$$
$$\bar{\rho}_1(\varkappa^2) = 0 \qquad (125)$$

e portanto com (122) e (125)

$$\lim_{R \to \infty} \langle 0 [j_0(f_R,t), A] | 0 \rangle = 0 \text{ a não ser que } \lambda \neq 0 \qquad (126)$$

Para concluir a demonstração do teorema basta mostrar que $\lambda \neq 0$ implica na existência de estados discretos de massa zero.

Com efeito usando (119) e (125) obtemos

$$\int \rho_2(\varkappa^2, \underline{y})\, u(y)\, d^3y = \lambda \delta(\varkappa^4) \qquad (127)$$

onde u é qualquer função que é 1 na região compacta onde ρ_2 é diferente de zero.

Fazendo uso das conhecidas relações [19]

$$\Delta(x,t,\varkappa^2)|_{t=0} = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta(\underline{x},t,\varkappa^2)|_{t=0} = \delta^3(x) \qquad (128)$$

e lembrando o fato de que em (118) a integração sôbre $d\varkappa^2$ vem de estados intermediários de massa $\varkappa^2$ vemos que com (127), (128) e (118)

$$\langle 0| \int u(x) j_0 (x,o)\, d^3x\, E(M^2)A - AE(M^2) \int u(x) j_0 (x,o)\, d^3x |0\rangle =$$

$$= \lambda \int_0^M \delta(\kappa^2)\, d\kappa^2 = \lambda \qquad (129)$$

onde $E(M^2)$ é o operador de projeção sôbre estados de massa menor ou igual a M. Como para $\lambda \neq 0$ (129) é diferente de zero por menor que seja M concluimos a existência de estados de massa zero discretos.

Para melhor compreender os elementos essenciais de nossa demonstração é útil compará-la com a seguinte prova "ingênua" do teorema de Goldstone.

Tomemos a distribuição

$$L(p, p_0) = \int \langle 0| [j_0(x,t), A] |0\rangle\, e^{-ip.x + ip_0 t}\, d^3x dt \qquad (130)$$

Usando a lei de conservação e comutatividade local concluimos como em (123)

$$\lim_{p \to o} p_0 L(p,p_0) = 0 \qquad (131)$$

e portanto

$$L(0, p_0) = \lambda\delta(p_0) \qquad (132)$$

Esta relação implica na existência de excitações discretas cuja energia vai a zero com o momentum sòmente se soubermos que $L(p, p_0)$ puder ser escrita como $g(p; p_0 - E(p))$ onde g é uma função contínua na primeira variável.

Este é sempre o caso em teorias relativísticas de campos como consequência da comutatividade local, porque $\tilde{\rho}_{1,2}(p^2, p)$ é a transformada de Fourier de uma função de suporte compacto e portanto analítica em p.

IV - Quebra Espontânea de Simetrias em Teorias de Muitos Corpos

1 - Formulação do Problema

Nos dois capítulos anteriores o postulado de comutatividade local desempenhou um papel fundamental na análise do problema da quebra espontânea de simetrias em teorias relativísticas. Para possibilitar uma extensão de nossos resultados a sistemas não relativísticos de muitos corpos, fomos levados a estudar o comportamento de comutadores (anti-comutadores) de operadores locais para tempos diferentes em teorias não relativísticas [20].

Lá podemos seguramente partir de relações de (anti) comutação canônicas e através das equações de movimento determinar em princípio o comportamento dos (anti) comutadores para tempos diferentes. Na prática é claro não podemos resolver as equações de movimento exatamente exceto nos dois casos extremos de acoplamento fraco e forte. A análise destas duas situações limite na secção 2 nos dá confiança de que em geral a razão de decrescimento do (anti)-comutador para tempos fixos e grandes separações espaciais estará intimamente relacionada com a razão de decrescimento do potencial entre as partículas.

Já que a discussão do Capítulo II (mas não do III) poderia ter sido feita substituindo-se o postulado de comutatividade local dado pela eq. 16 pela hipótese mais fraca

$$\lim_{|\underline{x}| \to \infty} \left[A\,(\underline{x},t),\, B \right] |\underline{x}|^{n} = 0 \qquad (133)$$

com n = 2, onde A e B são polinômios de classe 3 (eq. 11), podemos esperar que os resultados obtidos no Cap. II sejam válidos para sistemas de muitos corpos com potenciais de alcance suficientemente curto. Isto significaria que num sistema com forças de curto alcance e "gap de energia" não pode haver quebra espontânea de simetrias associadas a leis de conservação local.

Nas secções III e IV mostraremos que graças à quebra espontânea da invariância de Galileu que sempre ocorre num meio material de densidade finita a hipótese de um "gap de energia" no espectro de excitação da densidade é incompatível com forças de curto alcance. Isto impede qualquer aplicação posterior dos resultados do Cap. II.

As excitações de energia zero que estão sempre presentes numa teoria com forças de curto alcance e invariância de Galileu são do tipo fonon, isto é, ligadas ao estado fundamental pelo operador densidade de matéria. Os estados de quasi-partículas na teoria BCS da supercondutividade são ortogonais a estas excitações e podem portanto ter um "gap de energia". Contudo, o "gap" sòmente pode ser "absoluto" devido à presença de forças coulombianas de longo alcance que constituem um mecanismo para elevar a energia da excitação de Goldstone até um valôr finito, a energia do plasmon.

2 - <u>Comutadores e alcance das forças</u>

Consideremos a Hamiltoniana

$$H = H_K + V \qquad (134)$$

$$H_K = \frac{1}{2m} \int \underline{\nabla} \psi^+(\underline{x}) \, \underline{\nabla} \psi(\underline{x}) \, d^3x \qquad (135)$$

$$V = \frac{1}{2} \int \psi^+(\underline{x}) \, \psi^+(\underline{y}) \, \psi(\underline{x}) \, \psi(\underline{y}) \, V(\underline{x}-\underline{y}) \, d^3x \, d^3y \qquad (136)$$

onde ψ^+, ψ são um sistema de operadores de criação e destruição satisfazendo relações de comutação ou anti-comutação canônicas e V é o potencial entre as partículas.

Para esclarecer o tipo de conexão que deve existir entre a razão de decrescimento do potencial e o do comutador para tempos diferentes consideremos os dois casos limite

a)- $V = 0$

b)- $H_K = 0 \quad (m \to \infty)$

Para o caso a), sistema sem interação, é óbvio que o(anti) comutador entre

$$\psi_f(\underline{x},t) = \int f(\underline{x}',t') \, \psi(\underline{x}'+\underline{x}, t'+t) \, d^3x'dt' \qquad (137)$$

e

$$\psi_g^+ = \int g(\underline{x}',t') \, \psi^+(\underline{x}',t') \, d^3x'dt' \qquad (138)$$

onde f e g são funções infinitamente diferenciáveis e decrescendo mais depressa que qualquer potência no infinito) satisfaz a

$$\lim_{|\underline{x}| \to \infty} |\underline{x}|^n \left[\psi_f(\underline{x},t), \psi_g^+ \right]_{\pm} = \lim_{|\underline{x}| \to \infty} |\underline{x}|^n (2\pi) \int \tilde{f}(\underline{k}, \frac{\underline{k}^2}{2m}) \, \tilde{g}(-\underline{k}, -\frac{\underline{k}^2}{2m}) \, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{x} - \frac{\underline{k}^2}{2m} t)} \, d^3k = 0 \qquad (139)$$

para qualquer n positivo. Portanto, na ausência de um potencial o comutador resp. anticomutador entre dois operadores locais vai a zero mais depressa que qualquer potência para grandes separações espaciais e diferença temporal fixa.

No caso oposto b) a solução exata da equação de movimento é

$\psi(\underline{x},t) = T(\underline{x},t)\, \psi(\underline{x},0)$ (140)

com

$T(\underline{x},t) = \exp(-\, it \int V(\underline{x}-\underline{y})\, \psi^{+}(\underline{y},0)\, \psi(\underline{y},0)\, d^3y)$ (141)

O (anti) comutador é portanto dado por

$$[\psi(\underline{x},t), \psi^{+}(\underline{y},0)]_{\pm} = \mp (e^{itV(\underline{x}-\underline{y})} - 1)\, T(\underline{x},t)\, \psi^{+}(\underline{y},0)\, \psi(\underline{x},0) + \\ + \delta^3(x-y)\, T(\underline{x},t)) \qquad (142)$$

o que significa que para grandes separações espaciais o (anti) comutador vai a zero como $tV(\underline{x}-\underline{y})$. Já que o termo de energia cinética por si leva a um decrescimento mais rápido que qualquer potência, é muito sugestivo que o alcance do comutador é em geral controlado pelo alcance do potencial através de uma relação semelhante a (142) isto é

$|| [A(\underline{x},t), B(\underline{y},0)]_{\pm} || < c\, t\, V(\underline{x}-\underline{y})$ (143)

onde A e B são dois operadores locais limitados i.e.

$|| A || < \infty$, $|| B || < \infty$.

Nós não podemos agora elaborar mais sôbre esta questão, mas tomaremos como verdadeiro o fato de que a equação (133) será satisfeita com um n determinado pela razão de decrescimento do potencial e A,B polinômios de classe S.

3 - <u>Quebra da invariância de Galileu</u>

A razão pela qual o teorema central do Cap. II não é aplicável a sistemas de muitos corpos reside na incompatibilidade entre a hipótese de forças de curto alcance e "gap de energia".

Esta incompatibilidade pode ser vista da seguinte maneira: o sistema não relativístico de muitos-corpos possui um grupo de automorfismos correspondentes a transformações de Galileu. Em termos dos operadores de campo básicos estas são dadas por

$$\psi(\underline{x},t) \to \psi(\underline{x}-\underline{v}t,t) \exp i \left(m\underline{v}\underline{x} + \frac{mv^2}{2}t\right) \qquad (144)$$

Esta simetria é òbviamente quebrada (para um meio com densidade não nula) já que o estado fundamental do sistema está num referencial de Galileu privilegiado.

A transformação (144) produz uma mudança infinita num sistema infinitamente extenso (vide Introdução) não podendo portanto ser realizável por meio de operadores unitários. Como consequência dos métodos desenvolvidos no Cap. II concluimos que ou (133) não é válida (forças de longo alcance) ou não existe "gap de energia".

Mais explicitamente sendo ρ a densidade de matéria $\underline{j}$ o vetor corrente de matéria e $|0\rangle$ o estado fundamental do sistema as regras de comutação canônicas dão

$$\lim_{R\to\infty} \langle 0| \left[G^{R}_{\ell}, j_{\kappa}(0) \right] |0\rangle = i \langle 0| \rho(0) |0\rangle \delta_{\kappa\ell} \neq 0 \qquad (145)$$

onde

$$G^{R}_{\ell} = \int x_{\ell}\, \rho(\underline{x},o)\, f_R(\underline{x})\, d^3x \qquad (146)$$

torna-se o gerador das transformações de Galileu no limite $R \to \infty$ e portanto (145) traduz a quebra espontânea da invariância de Galileu.

Com

$$j_K(g) = \int j_K(\underline{x},t)\, g(\underline{x},t)\, d^3x\, dt \qquad (147)$$

onde g é uma função infinitamente diferenciável e caindo a zero mais depressa que qualquer potência no infinito e a lei de conservação

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\, \underline{j} = 0 \qquad (148)$$

temos que

$$\lim_{R\to\infty} \langle 0|\, [\, \frac{\partial G^R_\ell}{\partial t}, j_K(g)\,]\, |0\rangle = \lim_{R\to\infty} \int \langle 0|\, [\, j_\ell(\underline{x},o), j_K(g)\,]\, |0\rangle \cdot$$

$$\cdot f_R(\underline{x})\, d^3x + \lim_{R\to\infty} \int \langle 0|\, [\, j_m(\underline{x},o), j_K(g)\,]\, |0\rangle\, x_\ell \frac{\partial f_R(\underline{x})}{\partial x_m}\, d^3x \qquad (149)$$

Como $\frac{\partial f_R}{\partial x_m} = 0$ para $|\underline{x}| < R, > R + \epsilon$ a hipótese de forças de curto alcance traduzida por (133) com $n = 3$ implica que o segundo termo à direita na eq. (149) é nulo no limite $R \to \infty$. Se conseguirmos demonstrar que o primeiro termo à direita também se anula quando $R \to \infty$ obtemos aplicando o lema B do Cap. II no caso em que existe um "gap de energia"

$$\lim_{R\to\infty} \langle 0|\, [\, G^R_\ell, j_K(o)\,]\, |0\rangle = 0 \qquad (150)$$

em flagrante contradição com (145). Notando agora que como consequência da invariância de Galileu o vetor corrente de matéria $\underline{j}$ é também a densidade de momentum linear(*) podemos usando as

---

(*) Como pode ser fàcilmente visto da relação

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho(\underline{x},t)\, x_\ell\, d^3x = \int j_\ell(\underline{x},t)\, d^3x = i[\, H, G_\ell\,] = P_\ell$$

com $m = 1$

hipóteses de "gap de energia" e forças de curto alcance obter

$$\lim_{R \to \infty} \int \langle 0 | [j_{i} (\underline{x}, o), j_K(g)] | 0 \rangle f_R(\underline{x}) d^3x = \langle 0 | [P_i , j_K(g)] | 0 \rangle = 0 \tag{151}$$

o que mostra que (149) e portanto (150) se anulam.

Obtemos assim a desejada incompatibilidade entre forças de curto alcance e "gap de energia" como consequência da quebra espontânea da invariância de Galileu.

4 - Conexão direta entre o espectro de energia e alcance das forças

Na secção anterior supuzemos uma conexão não muito precisa entre o alcance das forças e o comportamento dos comutadores, o que permitiu obter alguma informação sôbre o espectro de energia da teoria. Abordaremos êste problema aquí de um modo mais direto empregando o método de regras de soma, e obtendo resultados mais quantitativos do que na secção 3.

Físicos que estudam o problema dos muitos corpos têm usado regras de soma semelhantes | 21 | e principalmente através delas entendem já há bastante tempo que na presença de forças coulombianas uma excitação de energia zero "Goldstoniana" pode adquirir uma energia finita tornando-se um plasmon [9], [22 | , [23].

Mostraremos agora o seguinte: num sistema de muitos corpos com um estado fundamental translacionalmente invariante e um potencial entre dois corpos satisfazendo $\lim_{r \to \infty} r^{(1 + \epsilon)} V(r) = 0$ para um $\epsilon > 0$, não existe "gap de energia".

Demonstração - Usando a equação de continuidade (148) obtemos por uma aplicação imediata das regras de comutação canônicas a conhecida regra de soma (sempre com m = 1)

$$\tilde{F}(\underline{p}) = \int_0^\infty \omega \, d\mu_p(\omega) = \langle 0 | \rho(0) | 0 \rangle \; p^2 \qquad (152)$$

onde $\tilde{F}(\underline{p})$ é a transformada de Fourier de

$$F(\underline{x}) = \langle 0 | \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho(\underline{x},0), \rho(0) \right] | 0 \rangle \qquad (153)$$

e $d\mu_p(\omega)$ uma medida positiva em ω .

Tomando agora a lei de conservação de momentum linear

$$\frac{\partial}{\partial t} j_i(\underline{x},t) = \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} - \psi^+(\underline{x},t) \int \nabla_i V(\underline{x}-\underline{y}) \, \rho(\underline{y},t) \, \psi(\underline{x},t) \qquad (154)$$

com

$$S_{ik} = -\frac{1}{2} \left[(\nabla_i \psi^+)(\nabla_k \psi) + (\nabla_k \psi^+)(\nabla_i \psi) \right] +$$
$$+ \frac{\delta_{ik}}{4} \left[(\nabla^2 \psi^+) \psi + \psi^+ (\nabla^2 \psi) + 2 (\nabla_\ell \psi^+)(\nabla_\ell \psi) \right] \qquad (155)$$

achamos fazendo uso das regras de comutação canônicas

$$\langle 0 | \left[\frac{\partial}{\partial t} j_i(\underline{x},0), j_\ell(0) \right] | 0 \rangle =$$
$$= \langle 0 | \left[\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k}(\underline{x},0), j_\ell(0) \right] | 0 \rangle +$$
$$+ \frac{\delta^3(\underline{x})}{i} \nabla_\ell \int \langle 0 | \rho(0) \rho(y,0) | 0 \rangle \nabla_i V(\underline{x}-y) \, d^3y -$$
$$- \frac{1}{i} \langle 0 | \rho(0) \rho(\underline{x},0) | 0 \rangle \cdot \nabla_\ell \nabla_i V(x) \qquad (156)$$

e usando (148) novamente obtemos

$$\int_0^\infty \omega^3 \, d\mu_p(\omega) = o\,(p^2) \quad \text{se} \quad \lim_{r \to \infty} r^{1+\epsilon}\, V(r) = 0 \qquad (157)$$

Comparando (152) com (157) concluimos

(i) não pode haver gap de energia

(ii) o pêso de $d\mu_p(\omega)$ fica inteiramente concentrado na origem para $\underline{p} = 0$:

$$\lim_{\underline{p} \to 0} \frac{\int_{a^2}^{\infty} d\mu_p(\omega)}{\int_0^{a^2} d\mu_p(\omega)} = 0 \qquad (158)$$

V - Conclusões

Tendo mostrado no Capítulo II que numa teoria relativística com "mass-gap" existem operadores unitários associados a simetrias contínuas da maneira usual, extendemos êste resultado no Capítulo III para teorias relativísticas sem "mass-gap" mas que não possuem estados discretos de massa zero. Quando tais estados estão presentes podemos então ter uma quebra espontânea de simetria e não é possível provar de maneira geral a existência de operadores unitários que realizem a transformação de simetria.

Os resultados do Cap. II poderiam ser fàcilmente aplicados à teoria dos muitos corpos quando existe um "gap de energia" entre o estado fundamental e o primeiro estado excitado, e forças de curto alcance. Contudo sòmente uma aplicação é possível, a que fizemos no Capítulo IV quando mostramos que, se as forças decrescem mais ràpidamente do que as Coulombianas, existem excitações de energia zero que podem ser interpretadas como "partículas de Goldstone" associadas à quebra espontânea da invariância de Galileu.

A interpretação destas excitações como partículas ou quasi-partículas depende de sua largura (inverso da vida média) ir a zero mais ràpidamente do que sua energia para $\underline{p} \to 0$ e contràriamente ao que acontece no caso relativístico (vêr Capítulo III) êste problema não pode ser resolvido de uma maneira geral, como vemos fàcilmente considerando o caso do gás de boson e gás de fermions livre. No primeiro caso temos excitações do tipo partículas com uma relação definida entre energia e momentum,no segundo não.

Estando presentes, estas excitações podem dar conta de outras simetrias espontâneamente quebradas. Saber se uma particular simetria é espontâneamente quebrada ou não, exige no caso do problema de muitos corpos mais informação do que o simples conhecimento do espectro de energia-momentum.

A natureza peculiar da interação de Coulomb como meio de inibir o aparecimento de "partículas de Goldstone" levou autores [24], [25], [16], à procura de um mecanismo semelhante na teoria relativística, abandonando a comutatividade local na presença de campos de gauge. Estas tentativas trazem a foco o ponto de que embora uma teoria deva ser idealmente formulada em termos de observáveis cujas regras de comutação podem seguramente ser tomadas como locais [12], estas observáveis são precisamente as quantidades gauge invariantes em termos das quais o problema da quebra da invariância de gauge não pode ser posto.

Agradecimentos

Ao Professor Rudolph Haag pelo muito que com êle aprendí, os meus maiores agradecimentos.

Sou grato aos Professores D. Kastler, N. Hughenholtz, D. Robinson, H. Ezawa, O. Steinman, M. Guenin, por inúmeras discussões, conversas e troca de correspondência.

Referências

[1] Y. Neeman - Nucl.Phys. 26, 222 (1961)
M. Gell-Mann - The Eightfold-way - preprint (1961), California Institute of Technology.

[2] R. Ascoli u. W. Heisenberg - Zs. f. Naturf. 12a, 177 (1957)

[3] R. Haag - Nuovo Cimento 25, 287 (1962)

[4] J. Goldstone, Nuovo Cimento 19, 154 (1961)
Y. Nambu and G. Jona Lasinio - Phys.Rev. 122, 345 (1961)

[5] J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, Phys.Rev. 127, 965 (1962)

[6] G. S. Guralnik, T. Kibble and C. R. Hagen, PRL 13, 585 (1964)

[7] R. F. Streater, Trieste Lectures, May 1965

[8] T. Kibble, Oxford Conference Report, 1965

[9] R. V. Lange, PRL 14, 3 (1965)

ref. incompletas

[10] R. F. Streater and A. S. Wightman, PCT, Spin and Statistics and All That (Benjamin Inc., New York, 1964)

[11] R. Haag, Hawaii Lecture Notes, (1965)

[12] R. Haag and D. Kastler, J. Math.Physics 5, 848 (1964)

[13] D. Kastler, D. Robinson and A. Swieca, Commun.Math.Physics 2, 108 (1966)

[14] Vêr por exemplo - J. v. Neumann - Mathematical Foundations of Quantum Mechanics (Princeton University Press -1955)

[15] P. Federbush and K. Johnson, Phys.Rev. 120, 1926 (1960)

[16] J. A. Swieca - Phys.Rev.Letters (a ser publicado)

[17] H. Ezawa and J. A. Swieca (a ser publicado)
J. A. Swieca (preprint, Univ. of Illinois - 1966)

[18] R. Jost and H. Lehmann, Nuovo Cimento 5, 1598 (1957)
F. J. Dyson, Phys.Rev. 110, 1460 (1958)
H. Araki, K. Hepp and D. Ruelle, Helv.Phys.Acta 35, 164 (1962)

[19] Schweber, Bethe, de Hoffmann, Mesons and Fields, Vol. I, Row-Peterson, 1956

[20] J. A. Swieca, Commun. Math. Physics (a ser publicado)

[21] D. Pines, "Elementary Excitations in Solids", W. A. Benjamin, New York, 1966

[22] P. W. Anderson, Phys.Rev. 112, 1900 (1958)

[23] D. Pines and P. Nozieres, "Theory of Quantum Liquids", W. A. Benjamin, New York, 1966

[24] F. Englert and R. Brout, Phys. Rev. Letters 13, 321 (1964)

[25] P. W. Higgs, Phys. Rev. Letters 13, 508 (1964)
P. W. Higgs, Spontaneous Breakdown without Massless Bosons , Phys. Rev. 145, 1156 (1966)