

O MÉTODO TAMM-DANCOFF  
E SUA APLICAÇÃO ÀS MODELOS  
SOLÚVEIS DA TEORIA  
DOS CAMPOS

JORGE ANDRÉ SWIECA

TESE DE DOUTORAMENTO APRESENTADA  
À FACULDADE DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS  
E LETRAS DA UNIVERSIDADE DE  
SÃO PAULO

SBI-UFSP



305M810T4290

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: T4290

SÃO PAULO

1963

## SUMARIO

O presente trabalho tem por finalidade um estudo comparativo das diversas modalidades de um método de aproximação utilizado em teoria quântica dos campos, conhecido como Método Tamm-Dancoff. Tal estudo será principalmente desenvolvido através de modelos solúveis da teoria dos campos, possibilitando uma compreensão mais clara das relações, vantagens e desvantagens dos diversos métodos em questão.

Aplicando o método Tamm-Dancoff à muitos tempos, originalmente empregado por Heisenberg em sua teoria unificada, à teoria mesônica convencional, mostraremos que graças à covariância explícita deste formalismo será possível introduzir uma técnica de renormalização livre das dificuldades presentes nos métodos à um tempo.

Examinaremos a possibilidade de eliminar as divergências de volume, ligadas à processos de flutuação de vácuo, que aparecem no 'velho' método Tamm-Dancoff não só por meio do 'novo' método como também através de uma modificação do sistema de equações correspondente ao 'velho' método. A conexão entre estas divergências e o teorema de Haag será estabelecida. Analisaremos num modelo solúvel o comportamento das 'velhas' e 'novas' amplitudes quando o número de operadores tende para infinito, obtendo o resultado de que ao contrário das 'velhas' as 'novas' amplitudes não tendem à zero neste limite, o que é uma indicação de que as 'novas' aproximações não convergem às soluções exatas dando na melhor das hipóteses um método assintótico.

As dificuldades encontradas pelos métodos à um tempo no cálculo de auto-valores em teorias unificadas do tipo da teoria de Heisenberg serão estudadas por meio de dois modelos solúveis proporcionando uma compreensão mais clara do significado físico destas dificuldades e a maneira de eliminá-las.

Concluiremos que o método à muitos tempos, não obstante sua provável não convergência para as soluções exatas, possui vantagens bem definidas sobre as demais versões do método Tamm-Dancoff não só na sua aplicação à teorias divergentes em virtude de sua renormalizabilidade como também à teorias unificadas finitas onde seu caráter auto-consistente leva, pelo menos em baixas ordens de aproximação, à valores mais corretos para as massas das partículas descritas por estas teorias.

## I- INTRODUÇÃO

## 1- RESENHA HISTÓRICA

Após o extraordinário sucesso da eletrodinâmica quântica na explicação de efeitos observáveis com o auxílio das técnicas de renormalização, grandes esforços foram gastos em tentativas de aplicar o formalismo dos campos quantizados à física dos mesons. Foi contudo logo percebido, que em virtude do grande valor da constante de acoplamento meson-nucleon, qualquer método baseado numa expansão em série de potências desta constante (teoria de perturbações), estava destinado à falhar nas predições quantitativas. Isto serviu de estímulo para a pesquisa de métodos de aproximação não perturbativos, levando ao desenvolvimento entre outros do método Tamm-Dancoff (M.T.D.)<sup>(1,2)</sup>, e mais recentemente à trabalhos baseados em relações de dispersão<sup>(3)</sup> e representação de Mandelstam<sup>(4)</sup>.

Seguindo um breve período de pesquisa ativa<sup>(5,6)</sup> o M.T.D. foi praticamente abandonado pelos especialistas em teoria de mesons, em virtude de um número de dificuldades inerentes, em particular a ausência de um processo de renormalização satisfatório<sup>(7)</sup>.

Num campo diferente contudo, um novo interesse está sendo dado ao M.T.D. especialmente através dos trabalhos de Heisenberg e co-autores<sup>(8)</sup> sobre a teoria spinorial das partículas elementares. Tomando uma equação para um campo de spinores fundamental, do tipo

$$i \not{\partial} \Psi = \ell^2 (\not{\Gamma} \Psi) \not{\Gamma} \Psi = 0 \quad (I.1)$$

onde  $\not{\Gamma} \not{\Gamma}$  é uma combinação invariante formada de matizes de Dirac, as massas das diferentes partículas elementares são supostas devidas à efeitos de auto-interação do campo fundamental. O fato de que  $\ell$  é a única constante dimensional da teoria exclui a priori qualquer tipo de esquema perturbativo no cálculo das quantidades observáveis, já que uma massa não nula dada pela teoria será forçosamente da forma  $m = a/\ell$ , onde "a" é um número puro. Estas massas devem ser calculadas por um método não perturbativo, no caso o método Tamm-Dancoff.

Este renovado interesse no M.T.D. e o aparecimento de novos problemas ligados à sua aplicação à teoria de Heisenberg constituem a motivação do presente trabalho. Nosso propósito é o de ilustrar e analisar as diferentes modalidades conhecidas do M.T.D. através de sua aplicação à modelos solúveis da teoria dos campos, trazendo assim as suas vantagens e desvantagens relativas à uma luz mais clara.

Na sua versão original, conhecida hoje como velho método Tamm-Dancoff, proposta independentemente por Tamm e Dancoff, procura-se soluções aproximadas para os auto-valores e autovetores de uma hamiltoniana de campos em interação,  $H = H_0 + H_{int}$ , mediante a expansão dos autovetores de H em termos de uma base formada pelos auto-vetores de  $H_0$ . Em um dado instante  $t = t_0$  podemos sempre expandir nossos campos quantizados em termos de operadores de criação e aniquilação

lação  $a^+(k), a(k)$  respectivamente, obedecendo a regras de comutação ou anti-comutação  $[a(k), a^+(k')]_{\pm} = \delta^3(k-k')$ , e introduzindo um vácuo 'bare'  $|0\rangle$  tal que  $a(k)|0\rangle = 0$ , construímos nossos vetores de base pela aplicação sucessiva de operadores de criação ao vácuo bare.

Para um auto-estado arbitrário da hamiltoniana  $H$  (estado físico) teremos à parte de um fator de normalização e deixando de lado por simplicidade qualquer índice caracterizando spin, iso-spin e as diferentes partículas em interação

$$|f\rangle = |0\rangle + \int f_1(k) a^+(k) |0\rangle d^3k + \int f_2(k_1, k_2) a^+(k_1) a^+(k_2) |0\rangle d^3k_1 d^3k_2 + \dots \quad (I.2)$$

onde podemos usar a conservação do momentum e as regras de seleção para simplificar a forma geral (I.2).

Se por exemplo estamos interessados no cálculo da energia de uma partícula física de momentum  $k$ , numa teoria que admite o decaimento virtual de uma partícula em duas outras, podemos escrever

$$|1, k\rangle = a^+(k) |0\rangle + \int f_2(k_1, k_2) \delta^3(k - k_1 - k_2) a^+(k_1) a^+(k_2) |0\rangle d^3k_1 d^3k_2 + \dots \quad (I.3)$$

onde a função  $\delta$  garante automaticamente que  $|1, k\rangle$  é um auto-estado do operador momentum com auto valor  $k$ .

Tomando agora a equação de auto-valores para a energia

$$H |1, k\rangle = E(k) |1, k\rangle \quad (I.4)$$

onde

$$H = \int \omega(k) a^+(k) a(k) d^3k + H_{int} \quad (I.5)$$

obtemos

$$(E - \omega(k)) a^+(k) |0\rangle + \int f_2(k_1, k_2) (E - \omega(k_1) - \omega(k_2)) \delta^3(k - k_1 - k_2) a^+(k_1) a^+(k_2) |0\rangle d^3k_1 d^3k_2 + \dots = H_{int} |1, k\rangle \quad (I.6)$$

donde

$$(E - \omega(k)) \delta^3(k - k') = \langle 0 | a(k') H_{int} | 1, k \rangle$$

$$(E - \omega(k_1) - \omega(k_2)) f_2(k_1, k_2) \delta^3(k - k_1 - k_2) = \langle 0 | a(k_1) a(k_2) H_{int} | 1, k \rangle$$

⋮
⋮

(I.7)

Os termos à direita do nosso sistema (I.7) podem ser explicitamente calculados uma vez conhecida  $E_{int}(a^+, a)$ , levando à expressões que na  $n$ -ésima equação envolvem  $f_j$  com  $n-m \leq j \leq n+m$  onde  $m$  depende do tipo de interação. Desta forma obtém-se um sistema infinito de equações integrais geralmente acopladas, e que chamaremos de velho sistema Tamm-Dancoff.

A aproximação proposta por estes autores consiste em colocar iguais à zero i.e. negligenciar todas as  $f_j$  com  $j > N$ . Desta forma ficamos com um sistema finito de equações integrais que para pequenos valores de  $N$  pode ser resolvido seja exata seja numericamente.

O método acima possui sérias desvantagens na sua aplicação à teorias relativisticamente invariantes. Além de não possuir uma estrutura explicitamente covariante dificultando a introdução de um formalismo consistente de renormalização para a eliminação das divergências ultravioletas, dá lugar ao aparecimento de novas divergências de um tipo não presente na teoria de perturbações, as quais dependem do volume infinito do espaço. Estas divergências de volume podem ser qualitativamente compreendidas da seguinte maneira:

Numa teoria relativisticamente invariante a possibilidade de criação virtual de pares faz com que o vácuo físico seja diferente do vácuo 'bare'. A invariância translacional da teoria obriga estes processos virtuais à ocorrer com uniformidade em todo o espaço, com duas consequências principais:

1- Um valor para a self-energia do vácuo proporcional ao volume do espaço ( $\sim \delta^3(0)$ )

2- A impossibilidade (a não ser de modo inteiramente formal) de se usar uma expansão do tipo (I.2) já que os estados físicos são na verdade ortogonais aos estados bare i.e. pertencem à um espaço de Hilbert diferente. A razão deste fato, matematicamente relacionado com o teorema de Haag<sup>(8,10)</sup> sobre a existência de representações irredutíveis inequivalentes das relações de comutação, pode ser encontrada na contribuição dominante de processos de flutuação de vácuo envolvendo um número arbitrariamente grande de partículas virtuais, o que faz com que a probabilidade de encontrar um número finito de partículas 'bare' no vácuo físico (e em qualquer outro estado físico) seja nula.

Antes mesmo que a dificuldade 2 fosse completamente conhecida pelos físicos já a necessidade de eliminar a self-energia do vácuo, assim como o desejo de obter expressões mais explicitamente covariantes para propósitos de renormalização, levou Dyson<sup>(5)</sup> à uma reformulação do método Tamm-Dancoff conhecida como novo M.T.D.

O significado físico da não covariância explícita do velho método torna-se claro se fixarmos por exemplo nossa atenção no problema da self-energia de um electron na electrodinâmica quântica. Na teoria de perturbações esta self-energia é em ordem mais baixa resultante de dois efeitos fisicamente diferentes, mas tratados de modo inteiramente simétrico no formalismo covariante: além da emissão e subsequente reabsorção de um foton virtual pelo electron, temos também a subtração de um processo de flutuação de vácuo que não pode ocorrer em presença do electron inicial (princípio de Pauli).

No velho M.T.D., estes dois processos correspondem à ordens de aproximação diferentes, já que o primeiro envolve duas partículas no estado intermediário e o segundo quatro. Como consequência uma análise gráfica do velho método dará lugar à diagramas que não possuem a simetria para frente para trás no tempo dos diagramas de Feynman da teoria de perturbações.

O novo M.T.D. procura eliminar as dificuldades presentes no velho método, tendo sido formulado por Dyson em termos das funções

$$\Psi(k_1 \dots k_n | k'_1 \dots k'_m) = \langle 0' | a^+(k_1) \dots a^+(k_n) a(k'_1) \dots a(k'_m) | f \rangle \quad (I.8)$$

onde  $|0'\rangle$  é o vácuo físico com  $\begin{cases} H|0'\rangle = E_0|0'\rangle \\ \bar{P}|0'\rangle = 0 \end{cases}$  e  $|f\rangle$  um auto-estado qual-

quer de H com  $H|f\rangle = E|f\rangle$ ;  $a^+(k)$  e  $a(k)$  são os operadores 'bare' de criação e aniquilação que vem da expansão dos operadores de campo em um dado instante, em integrais de Fourier.

Ao contrário do que acontece com o vácuo 'bare' no velho método, podemos agora não somente 'criar' uma partícula no vácuo físico, mas também aniquilar, já que tanto  $a^+(k)|0'\rangle$  como  $a(k)|0'\rangle$  são diferentes de zero.

Tomando a série de identidades

$$E \langle 0' | a^+(k_1) \dots a^+(k_n) a(k'_1) \dots a(k'_m) | f \rangle = \langle 0' | a^+(k_1) \dots a^+(k_n) a(k'_1) \dots \dots a(k'_m) H | f \rangle = \langle 0' | H a^+(k_1) \dots a^+(k_n) a(k'_1) \dots a(k'_m) | f \rangle + \langle 0' | [a^+(k_1) \dots \dots a(k'_m), H] | f \rangle \quad (I.9)$$

$$\dots a(k'_m), H | f \rangle = E_0 \langle 0' | a^+(k_1) \dots a(k'_m) | f \rangle + \langle 0' | [a^+(k_1) \dots a(k'_m), H] | f \rangle$$

obtemos

$$(E - E_0) \Psi(k_1 \dots k_n | k'_1 \dots k'_m) = \langle 0' | [a^+(k_1) \dots a(k'_m), H_0] | f \rangle + \dots \dots \dots \langle 0' | [a^+(k_1) \dots a(k'_m), H_{int}] | f \rangle \quad (I.10)$$

e usando a expressão (I.5) para  $H_0$  segue-se

$$\begin{aligned} & \left[ (E - E_0) - (w(k'_1) + \dots + w(k'_m)) + (w(k_1) + \dots + w(k_n)) \right] \Psi(k_1 \dots k_n | k'_1 \dots k'_m) = \\ & = \langle 0' | [a^+(k_1) \dots a(k'_m), H_{int}] | f \rangle \end{aligned} \quad (I.11)$$

Os termos à direita de (I.11) após o cálculo explícito dos comutadores para um dado  $H_{int}(a^+, a)$  dependerão de um número finito de funções vizinhas da função à esquerda, levando novamente a um sistema de infinitas equações integrais acopladas. Como no caso precedente negligenciamos neste sistema

$\Psi(k_1 \dots k_n | k'_1 \dots k'_m)$  para  $n+m > N$  obtendo assim um sistema aproximado finito onde somente a diferença  $E - E_0$  comparece, eliminando-se assim a energia de ponto zero.

Quando aplicamos o novo método ao problema da self-energia de uma partícula que pode decair virtualmente em duas, teremos que levar em considerações além da amplitude  $\langle 0' | a(k)a(k') | 1, k+k' \rangle$  também a amplitude  $\langle 0' | a^\dagger(-k)a^\dagger(-k') | 1, k+k' \rangle$  na mesma ordem de aproximação. A primeira descreverá através de seu acoplamento com a amplitude  $\langle 0' | a(k+k') | 1, k+k' \rangle$  o processo de emissão e subsequente reabsorção de uma partícula virtual ao passo que a segunda descreverá a influência da presença da partícula inicial sobre as flutuações do vácuo. Desta forma estes dois efeitos são tratados de maneira mais simétrica que no velho método, donde uma maior semelhança estrutural do novo método com os formalismos covariantes.

O método de Dyson possui contudo a desvantagem de uma insuficiente caracterização do vetor bra das amplitudes (I.8) como sendo o vácuo físico. Com efeito o sistema (I.11) deve admitir soluções correspondentes à tomar o vetor bra como sendo qualquer auto-estado da hamiltoniana total. Para especificar que este estado é realmente o vácuo físico condições subsidiárias são necessárias. Dyson em seus trabalhos<sup>(5,7)</sup> obtém estas condições através da imposição de que as amplitudes não devem conter certos polos na energia que pareceriam corresponder à processos de produção a físicos, e que na verdade seriam indícios de que o vetor bra não é o vácuo físico.

Um outro ponto fraco do novo método que examinaremos mais tarde com algum detalhe, se relaciona com a não ortogonalidade das novas amplitudes o que torna dúbia a sua interpretação física, refletindo-se inclusive na eliminação dos polos espúrios, que só seriam indesejáveis se as novas amplitudes pudessem ser interpretadas como funções de onda.

Uma variante do método de Dyson que está mais próxima do formalismo usado na teoria de Heisenberg, consiste em tomar como ponto de partida a definição de produto normal de operadores no espaço das configurações através da regra de Wick<sup>(11)</sup>

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(x_1) \dots \Psi_\beta(x_n) \bar{\Psi}_\gamma(x'_1) \dots \bar{\Psi}_\delta(x'_m) = : \Psi_\alpha(x_1) \dots \bar{\Psi}_\delta(x'_m) : + \\ + \sum_{\alpha\gamma} : \Psi_\alpha(x_1) \dots \bar{\Psi}_\delta(x'_m) : + \dots + \sum_{\beta\delta} : \dots : + \dots \end{aligned} \quad (I.12)$$

onde todos os operadores são tomados num dado tempo e o produto normal

$: \Psi_\alpha(x_1) \dots \bar{\Psi}_\delta(x'_m) :$  fica implicitamente definido por (I.12) assim que as funções de contração

$$\begin{aligned} \overbrace{\Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(x')}^{(+)} = S_{\alpha\beta}(x-x') \\ \overbrace{\bar{\Psi}_\beta(x') \Psi_\alpha(x)}^{(-)} = S_{\alpha\beta}(x-x') \end{aligned} \quad (I.13)$$

são dadas. Usando para  $S^{(\pm)}$  as funções do campo livre, o produto normal assim obtido corresponderá à regra usual de operadores de criação à direita e operadores de aniquilação à esquerda, coincidindo com a ordem usada na definição das amplitudes de Dyson (I.8)

Uma outra possibilidade consiste em escrever para  $S^{(\pm)}$

$$\begin{aligned} \langle 0' | \Psi_{\alpha}(x) \bar{\Psi}_{\beta}(x') | 0' \rangle &= S_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x') \\ \langle 0' | \bar{\Psi}_{\beta}(x') \Psi_{\alpha}(x) | 0' \rangle &= S_{\alpha\beta}^{(-)}(x-x') \end{aligned} \quad (I.14)$$

Esta ultima escolha é particularmente importante para teorias como a de Heisenberg<sup>(8)</sup> onde a quantização é não canônica i.e.  $[\Psi_{\alpha}(x), \bar{\Psi}_{\beta}(x')] \neq i\delta_{\alpha\beta}^3(x-x')$ , implicando na impossibilidade de introduzir operadores 'bare' usuais de criação e aniquilação. As funções  $S^{(\pm)}$  da teoria de Heisenberg serão regularizadas como consequência da quantização não canônica, implicando o uso de um espaço de Hilbert com métrica indefinida<sup>(12)</sup> e levando a resultados finitos.

Usando agora a equação de movimento

$$i \dot{\Psi}_{\alpha}(x) = K_{\alpha}(\gamma, \bar{\gamma}, \nabla \gamma) \quad (I.15)$$

obtemos

$$\begin{aligned} (E - E_0) \langle 0' | \Psi_{\alpha}(x_1) \dots \bar{\Psi}_{\beta}(x'_m) | f \rangle &= i \frac{d}{dt} \langle 0' | \Psi_{\alpha}(x_1) \dots \bar{\Psi}_{\beta}(x'_m) | f \rangle = \\ &= \sum_I \langle 0' | \Psi_{\alpha}(x_1) \dots K_{i_1}(\gamma, \bar{\gamma}, \nabla \gamma) \dots \bar{\Psi}_{\beta}(x'_m) | f \rangle - \\ &\quad - \sum_J \langle 0' | \Psi_{\alpha}(x_1) \dots K_{j_1} \dots \bar{\Psi}_{\beta}(x'_m) | f \rangle \end{aligned} \quad (I.16)$$

onde a primeira igualdade de (I.16) é consequência da invariância por translações no tempo. Aplicando (I.12) podemos escrever os produtos de operadores em (I.16) em termos dos produtos normais. No caso de uma equação de movimento do tipo (I.1) somos levados a um sistema infinito que simbolicamente escrevemos:

$$(E - E_0 - i \overleftrightarrow{\alpha} \cdot \overleftrightarrow{\nabla}) \left\{ \sum_{i=1}^{N+2} c_i \Psi(i) \right\} = \sum_{i=1}^{N+2} I_i \Psi(i) \quad (I.17)$$

onde  $i \overleftrightarrow{\alpha} \cdot \overleftrightarrow{\nabla}$  representa a parte de energia cinética,  $c_i$  e  $I_i$  funções das coordenadas espaciais.  $\Psi(i)$  representam elementos de matriz de um produto normal de  $i$  operadores. Colocando  $\Psi(N+2) = 0$  obtemos um sistema finito correspondente a aproximação de ordem  $N$ .

Quando as funções do campo livres são usadas como funções de contração o sistema (I.17) coincide com o sistema de Dyson (I.11) escrito no espaço das configurações.

Os métodos expostos até agora tem em comum a propriedade de serem formulados em termos de operadores correspondentes à um mesmo tempo, digamos  $t=0$ . Classificá-los portanto como métodos à um tempo.

Existe uma interessante generalização destes formalismos, que faz uso de operadores em tempos diferentes e é chamado método à muitos tempos. Tendo sua origem histórica num trabalho de Landau e Peierls<sup>(13)</sup> tem sido extensivamente aplicado por Heisenberg<sup>(8,14)</sup> em sua teoria unificada, possuindo sobre os demais M.T.D. a imediata vantagem de sua covariância explicita, no que se aproxima do esquema de Bethe-Salpeter<sup>(15)</sup>.



O método Tamm-Dancoff a muitos tempos é formulado em termos de elementos de matriz entre o vácuo físico (sendo neste respeito um novo método) e um auto-estado qualquer, de um produto cronológico de operadores tomados em tempos arbitrários. O produto cronológico sendo definido como colocando um operador correspondente a um tempo posterior à esquerda de um operador pertencente à um tempo anterior, com uma troca de sinal para cada intercâmbio de campos anticomutativos, temos

$$\mathcal{T}(n|m) = \langle 0' | T \Psi_{\alpha}(x_1) \dots \bar{\Psi}_{\beta}(x'_m) | f \rangle \quad (I.18)$$

Exemplificando o método com uma equação diferencial do tipo (I.1) obtemos

$$\begin{aligned} i \int d^4x_1 \frac{\partial}{\partial x_1^{\mu}} \langle 0' | T \Psi_{\alpha}(x_1) \dots \bar{\Psi}_{\beta}(x'_m) | f \rangle = \\ = \frac{1}{i} \ell^2 \langle 0' | T \Psi_{\alpha}(x_1) \dots (\bar{\Psi} \Gamma \Psi)(\Gamma \Psi(x_1)) \dots \bar{\Psi}_{\beta}(x'_m) | f \rangle \end{aligned} \quad (I.19)$$

onde numa teoria quantizada canonicamente teríamos termos <sup>adicionais</sup> à direita, envolvendo  $\delta^4(x_i - x'_j)$ , provenientes de um intercâmbio de posição entre os operadores  $\Psi(x_i)$  e  $\bar{\Psi}(x'_j)$  para  $t_i = t'_j$ . A equação (I.19) pode ser invertida por meio da função de Feynman <sup>(iv)</sup> para o neutrino  $G(x) = \frac{1}{(2v)^4} \int d^4p e^{-ipx} \frac{1}{P_{\mu}^{\mu} + i\epsilon}$

$$\mathcal{T}(m|n) = \frac{1}{i} \ell^2 G \{ \mathcal{T}(m+1|n+1) \} \quad (I.20)$$

Quando a massa da função de Feynman usada (no caso  $m=0$ ), coincide com a massa física de uma partícula presente no vetor ket, um termo inhomogeneo deve ser adicionado à direita da equação (I.20). O emprêgo da função de Feynman e de termos inhomogeneos apropriados é uma condição subsidiária caracterizando o vetor bra como sendo o vácuo físico e o vetor ket como um estado 'ingoing' físico.

Introduzindo o produto normal de operadores para tempos quaisquer pela fórmula,

$$\begin{aligned} T \{ \Psi_{\alpha}(x_1) \dots \bar{\Psi}_{\beta}(x'_m) \} =: \Psi_{\alpha}(x_1) \dots \bar{\Psi}_{\beta}(x'_m) : + \sum \text{---} : + \dots \\ + \sum \text{---} : + \dots \end{aligned} \quad (I.21)$$

onde a função de contração é dada por

$$\underline{\Psi}_{\alpha}(x) \underline{\bar{\Psi}}_{\beta}(y) = \langle 0' | T \Psi_{\alpha}(x) \bar{\Psi}_{\beta}(y) | 0' \rangle \quad (I.22)$$

e chamando de  $\mathcal{Y}(n|m) = \mathcal{Y}(n+m)$  o elemento de matriz de um produto normal de  $n \Psi$  e  $m \bar{\Psi}$ , passamos de (I.20) para o sistema simbólico

$$\sum_{i=M}^{N'} c_i \mathcal{Y}(i) = \frac{1}{i} G \left\{ \sum_{i=1}^{N'+2} r_i \mathcal{Y}(i) \right\} \quad (I.23)$$

formalmente análogo a (I.17). A aproximação consiste novamente em colocar  $\Psi(N+2)=0$ . Possuindo sobre os formalismos a um tempo a óbvia vantagem de sua estrutura covariante, o método à muitos tempos difere dos primeiros também por sua propriedade de, em uma dada ordem de aproximação, levar à varios sistemas integrais possuidores em geral de soluções diferentes; isto é claro, já que existem muitas maneiras de aplicar operadores diferenciais às funções  $\Psi$  i.e. o operador diferencial pode ser aplicado a qualquer dos campos em (I.19), o número de possibilidades aumentando com a ordem considerada. Esta ambiguidade pode ser contornada escolhendo-se o sistema que por razões físicas parece descrever a contribuição mais importante para o processo que se está analisando, ou na ausência de um tal critério, tomando-se uma média sobre os diversos sistemas possíveis.

Mencionemos finalmente o que parece ser um ponto fraco de todos os novos métodos, seja a um ou à muitos tempos. Está ligado com o fato de que para justificar qualquer aproximação Tamm-Dancoff, as amplitudes correspondentes devem num certo sentido tender para zero quando o número de operadores tende a infinito. Embora seja plausível que as velhas amplitudes tenham esta propriedade (num sentido a ser precisado no cap.III)<sup>(17)</sup>, é pouco provável que o mesmo aconteça com as novas amplitudes, já que definindo-as através de (I.12,21) somente levamos em conta as correlações de dois operadores por meio da função de contração. Numa teoria livre as correlações mais elevadas, i.e. os valores esperados no vácuo de um produto cronológico de mais de dois operadores, decompõem-se em produtos das funções de dois pontos, as definições (I.12,21) sendo apropriadas neste caso. Numa teoria com interação contudo, negligenciar elementos de matriz de produtos normais assim definidos, mesmo para um número arbitrariamente grande de operadores, é um procedimento que não leva corretamente em conta as correlações mais elevadas. Como consequência não devemos esperar que a sucessão de aproximações do novo M.T.D. sejam convergentes para as soluções exatas, o novo método sendo neste caso na melhor das hipóteses um método assintótico.

Por outro lado, uma definição mais elaborada do produto normal, levando em conta as correlações mais elevadas, conduzirá a um sistema de equações não lineares para estas correlações, com uma estrutura muito mais complicada do que os sistemas (I.17,23).

## 2- PROGRAMA DO TRABALHO

Nos diversos capítulos que seguem procuraremos analisar uma série de problemas destinadas a permitir a focalização das diferenças essenciais entre os diversos métodos Tamm-Dancoff. Assim no capítulo II o M.T.D. à muitos tempos, até o presente utilizado essencialmente por Heisenberg e seu grupo, é aplicado a teoria mesonica convencional, com a dupla finalidade de, ao mesmo tempo em que ilustramos seu funcionamento através de um exemplo realístico familiar, poderemos apreciar as vantagens que a covariância explícita deste formalismo oferece sobre as demais versões não covariantes do M.T.D.

Como seria de esperar, somos levados nesta aplicação a considerar equações integrais contendo divergências ultra-violetas, as quais em virtude da estrutura covariante do método à muitos tempos, podem ser eliminadas por um processo de renormalização semelhante ao utilizado em teoria de perturbações,<sup>(18)</sup> evitando-se assim as dificuldades e ambiguidades encontradas por diversos autores<sup>(7)</sup> em suas tentativas de renormalizar os métodos Tamm-Dancoff à um tempo. A conexão entre as amplitudes T.D. à muitos tempos e as quantidades fisicamente relevantes como amplitudes de espalhamento é estabelecida através da fórmula de redução de Lehmann, Symanzki e Zimmermann<sup>(19)</sup>, levando à resultados que correspondem a series sobre sub-conjuntos infinitos de graficos de Feynman da teoria de perturbações.

Finalizaremos o capítulo II esquematizando a extensão de nossos cálculos para ordens de aproximações arbitrárias, e apresentando argumentos em favor do nosso ponto de vista de que o M.T.D. à muitos tempos, como alias qualquer novo método, não converge em geral para as soluções exatas, sendo portanto na melhor das hipóteses um método assintótico.

Com o capítulo III principiamos um estudo comparativo entre as diversos métodos expostos nas duas primeiras partes deste trabalho, por meio de modelos solúveis da teoria quântica dos campos.

O modelo apresentado no capítulo III é formulado de modo a possibilitar uma análise simples da diferença essencial entre o velho e novo M.T.D., i.e. o aparecimento no primeiro caso de divergências de volume ligadas à processos de vácuo. Mostraremos que além da possibilidade de eliminar estas divergências por intermédio do novo método devido a Dyson<sup>(5)</sup>, o mesmo fim será atingido mediante uma modificação apropriada do velho sistema de equações. A conexão entre estas divergências de volume e o teorema de Haag<sup>(9)</sup> será estudada levando à uma prova simplificada deste teorema.

A interpretação usual das novas amplitudes como sendo uma generalização do conceito de função de onda, será criticada com base na observação da não ortogonalidade e não normalizabilidade destas amplitudes. Este fato é de particular importância nas implicações que tem sobre o método de Dyson, onde a conexão entre as amplitudes T.T. e as quantidades observáveis não é feita como no caso à muitos tempos através de uma fórmula de redução rigorosa, mas mediante a interpretação destas amplitudes como se fossem funções de onda (vide o trabalho de Dalitz e Dyson<sup>(7)</sup> por exemplo, interpretação esta que parece injustificada. A não ortogonalidade das novas amplitudes manifesta-se também na estrutura não hermitiana do novo sistema de equações, fato que contribui para tornar duvidosa a convergência das aproximações para as soluções exatas, já que a aproximação de um sistema infinito por meio de uma sequência de sub-sistemas finitos não é em geral matematicamente justificada para sistemas não hermitianos.

Finalmente examinaremos no nosso modelo o comportamento das velhas e novas amplitudes quando o número de operadores tende para infinito, obtendo o resultado de que enquanto as velhas amplitudes tendem à zero neste limite, as novas,

para constantes de acoplamento suficientemente grandes divergem com o número de operadores. Isto é tomado como outra indicação do caráter em geral não convergente do novo método, e de que a não ser no caso de divergências ultra-violetas - que em última análise representam provavelmente um defeito da teoria e não do método de aproximação - o velho método, após a eliminação das divergências de volume pela técnica que introduzimos, é entre os diversos M.T.D. o que maiores possibilidades tem de convergir para as soluções exatas.

Nos capítulos IV e V estudaremos relações entre formalismos à um e a muitos tempos quando aplicados ao cálculo de autovalores em teorias unificadas do tipo Heisenberg, <sup>(8,26)</sup> isto é teorias onde a massa é inteiramente devida a interação. Embora o caráter finito destas teorias possibilite em princípio a obtenção de valores definidos para as massas das partículas, a aplicação da maioria dos métodos de aproximação à estas teorias levará à dificuldades ora grupo-teóricas, como a impossibilidade aparente de obter massas não nulas para os fermions numa teoria  $\gamma_5$  invariante, ora dinâmicas, como o aparecimento de auto-valores negativos ou complexos em lugar de reais e positivos no cálculo das massas. A razão física destas dificuldades é encontrada na impossibilidade de construir uma partícula massiva estável a partir de partículas de massa nula, já que em virtude da interação a primeira sempre poderá decair nas segundas.

Um método de aproximação satisfatório terá então que levar em conta que as partículas virtuais constituindo o estado físico também tornam-se massivas em virtude da interação, isto é deverá ser um método auto-consistente no sentido da massa física ser introduzida à priori nos cálculos para ser depois determinada. Mostraremos que enquanto o M.T.D. a um tempo não possui um caráter auto-consistente levando a auto-valores aproximados negativos ou complexos, os formalismos à muitos tempos como o M.T.D. à muitos tempos ou equação de Bethe-Salpeter são auto-consistentes em virtude do aparecimento da massa física nos kernels das equações integrais correspondentes através da função de contração.

No capítulo IV estas questões serão estudadas por meio de um modelo solúvel para um problema de estado ligado, análogo ao da obtenção de mesons como estados ligados de nucleons na teoria de Heisenberg. A superioridade que o M.T.D. à muitos tempos, em virtude do seu significado físico, possui sobre o método a um tempo para este tipo de problemas, ficará claramente ilustrada.

Por outro lado o fato que em nosso modelo a equação de Bethe-Salpeter conduz a resultados melhores que o M.T.D. à muitos tempos é sensivelmente modelo-dependente e não dever ter validade geral.

No capítulo V analisaremos as dificuldades com que se defronta o M.T.D. à um tempo na sua aplicação ao cálculo da massa de uma partícula física numa teoria do tipo Heisenberg. Este problema análogo ao do cálculo da massa de um nucleon na teoria unificada, é estudado através de um modelo de um sistema de infinitas equações acopladas que pode ser resolvido.

As dificuldades que se manifestam no aparecimento de auto-valores complexos em qualquer aproximação, mesmo quando soluções exatas reais existem, podem ser eliminadas mediante uma modificação do esquema de aproximações intimamente relacionada com o método usado na teoria de perturbações de separar a massa 'bare' na massa física menos um termo de correção. Esta modificação do método à um tempo, que em nosso modelo leva aos mesmos resultados que o método à muitos tempos, é inteiramente justificada no modelo e argumentos físicos são dados quanto à sua adequação em teorias mais realísticas.

As dificuldades de origem grupo-teoretica não serão tratadas já que sua eliminação pelo uso de um método auto-consistente é claramente visível nos trabalhos de Heisenberg<sup>(8)</sup> e Nambu<sup>(28)</sup>.

## II

APLICAÇÃO DE UM M.T.D. À MUITOS TEMPOS AO ESPALHAMENTO MESON-NUCLEONI- FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Examinaremos neste capítulo a aplicação de um M.T.D. à muitos tempos à teoria mesonica convencional. Por simplicidade tomaremos um campo mesonico escalar sem variáveis de iso-spin. As equações de movimento, com a métrica dada por

$$x^\mu y_\mu = x \cdot y = x_0 y_0 - \vec{x} \cdot \vec{y}, \text{ são} \quad (II.1a)$$

$$i \gamma^\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} - m_0 \Psi = g_0 \Psi \phi$$

ou

$$i \not{\partial} \Psi - m \Psi = g_0 \Psi \phi - \delta_m \Psi \quad (II.1b)$$

e

$$(0 + \mu^2)\phi = g_0 : \bar{\Psi} \Psi : + \delta \mu^2 \phi \quad (II.2)$$

onde  $m_0$  é a massa 'bare' do nucleon,  $m$  sua massa física  $\mu$  a massa física do meson e  $g_0$  a constante de acoplamento não renormalizado. Dos campos  $\Psi$  e  $\phi$  satisfazendo regras de comutação canônicas passamos aos campos renormalizados:<sup>(18)</sup>

$$\Psi^r(x) = Z_2^{-1/2} \Psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sum_{i=1}^2 \left\{ d_i^+(-\vec{k}, t) v^i + b_i(\vec{k}, t) u^i \right\} e^{i \cdot \vec{k} \cdot \vec{x}} d^3 k \frac{m}{E(k)} \quad (II.3)$$

$$\bar{\Psi}^r(x) = Z_2^{-1/2} \bar{\Psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sum_{i=1}^2 \left\{ d_i(-\vec{k}, t) \bar{v}^i + b_i^+(\vec{k}, t) \bar{u}^i \right\} e^{-i \vec{k} \cdot \vec{x}} d^3 k \frac{m}{E(k)} \quad (II.4)$$

$$\psi^{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) = Z_3^{-1/2} \hat{\psi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int \left\{ a^{\dagger}(-\vec{k}, t) + a(\vec{k}, t) \right\} e^{i\vec{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{d^3k}{W(\mathbf{k})} \quad (\text{II.5})$$

$$\hat{\psi}^{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) = Z_3^{-1/2} \hat{\psi}(\mathbf{x}) = \psi^{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int \left\{ a^{\dagger}(-\vec{k}, t) - a(\vec{k}, t) \right\} e^{i\vec{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k \quad (\text{II.6})$$

onde  $u^i, v^i$ , são spinores de energia positiva resp. negativa correspondendo à massa  $m$  e às duas orientações do spin com a condição de normalização

$$\begin{cases} \bar{u} u = 1 \\ \bar{v} v = 1 \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

$$\begin{cases} E(\mathbf{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \\ W(\mathbf{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + u^2} \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

Definiremos agora os operadores 'ingoing' e 'outgoing' por, (a rigor os campos deveriam ter sido projetados sobre pacotes de onda normalizáveis e não sobre ondas planas como em (II.3-6) )

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \begin{cases} \langle \alpha | a^{\dagger}(\vec{k}, t) | \beta \rangle e^{-iW(\mathbf{k})t} \\ \langle \alpha | b^{\dagger}(\vec{k}, t) | \beta \rangle e^{-iE(\mathbf{k})t} \\ \langle \alpha | d^{\dagger}(\vec{k}, t) | \beta \rangle e^{-iE(\mathbf{k})t} \end{cases} = \begin{cases} \langle \alpha | a_{\text{out}}^{\dagger}(\vec{k}) | \beta \rangle \\ \langle \alpha | b_{\text{out}}^{\dagger}(\vec{k}) | \beta \rangle \\ \langle \alpha | d_{\text{out}}^{\dagger}(\vec{k}) | \beta \rangle \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \begin{cases} \langle \alpha | a(\vec{k}, t) | \beta \rangle e^{iW(\mathbf{k})t} \\ \langle \alpha | b(\vec{k}, t) | \beta \rangle e^{iE(\mathbf{k})t} \\ \langle \alpha | d(\vec{k}, t) | \beta \rangle e^{iE(\mathbf{k})t} \end{cases} = \begin{cases} \langle \alpha | a_{\text{in}}(\vec{k}) | \beta \rangle \\ \langle \alpha | b_{\text{in}}(\vec{k}) | \beta \rangle \\ \langle \alpha | d_{\text{in}}(\vec{k}) | \beta \rangle \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

onde  $a_{\text{in}}^{\dagger}(\vec{k}), b_{\text{in}}^{\dagger}(\vec{k}), d_{\text{in}}^{\dagger}(\vec{k}), a_{\text{in}}(\vec{k}), b_{\text{in}}(\vec{k}), d_{\text{in}}(\vec{k})$  são operadores de criação resp. aniquilação de partículas físicas em estados ingoing resp. outoing. Eles diferem dos operadores usualmente empregados<sup>(18)</sup> por um fator de normalização covariante.

$|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$  são estados arbitrários do espaço de Hilbert da hamiltoniana total.

De (II.9-10) obtemos os campos 'ingoing' e 'outgoing' satisfazendo as equações de campo livres com massas físicas, e obedecendo à relações de comutação canônicas

$$\Psi_{\text{out}}^{\text{in}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sum_{i=1}^2 \left\{ d_{\text{out}}^{\text{in}}(\vec{k}) v^i e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + iE(k)t} + b_{\text{out}}^{\text{in}}(\vec{k}) u^i e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - iE(k)t} \right\} \frac{d^3k}{E(k)} \quad (\text{II.11})$$

$$\Phi_{\text{out}}^{\text{in}}(x) = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int \left\{ a_{\text{out}}^{\text{in}}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\omega(k)t} + a_{\text{out}}^{\text{in}}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega(k)t} \right\} \frac{d^3k}{\omega(k)} \quad (\text{II.12})$$

De (II.11,12) segue-se

$$b_{\text{out}}^{\text{in}}(\vec{p}_1) = \int_{t=\text{const.}} \bar{\Psi}_{\text{out}}^{\text{in}}(x) \gamma^4 u^i e^{-i\vec{p}_1\cdot x} \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} \left\{ (\gamma^u p_1 - m) u^i = 0 \right\} \quad (\text{II.13})$$

$$a_{\text{out}}^{\text{in}}(\vec{p}_2) = -i \int_{t=\text{const.}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{\text{out}}^{\text{in}}(x) e^{-i\vec{p}_2\cdot x} \quad \Phi_{\text{out}}^{\text{in}}(x) \frac{\partial}{\partial t} e^{-i\vec{p}_2\cdot x} \right\} \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} =$$

$$= -i \int_{t=\text{const.}} \Phi_{\text{out}}^{\text{in}}(x) \frac{\partial}{\partial t} e^{-i\vec{p}_2\cdot x} \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} \quad (\text{II.14})$$

e formulas correspondentes para os outros operadores.

Introduzindo o vácuo físico tal que

$$\left. \begin{array}{l} a_{\text{out}}(\vec{k}) \\ b_{\text{out}}(\vec{k}) \\ d_{\text{out}}(\vec{k}) \\ \text{vac} \end{array} \right\} \cdot |0\rangle = 0 \quad (\text{II.15})$$

obteremos qualquer estado físico (assumindo a 'completeness' dos campos assintóticos) mediante a aplicação de operadores de criação ao vácuo físico.

A matriz S covariante será dada por

$$S_{\gamma\delta} = \langle \gamma \text{ out} | \delta \text{ in} \rangle \quad (\text{II.16})$$

onde  $\gamma, \delta$  caracterizam os números quânticos das partículas outgoing resp. ingoing.

Tomando o caso de espalhamento meson-nucleon, com o índice '1' referente ao nucleon e o índice '2' ao meson temos

$$S_{p_1' p_2' p_1 p_2} = \langle p_1' p_2' \text{ out} | p_1 p_2 \text{ in} \rangle \quad (\text{II.17})$$

Usando (II.9,10,13,14) obtemos

$$S_{p_1' p_2' p_1 p_2} = \left\{ \begin{aligned} & -i \int e^{i p_1' x_1 + i p_2' x_2} \frac{d^3 x_1 d^3 x_2}{(2\pi)^3} \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t_2}} \langle 0' | \Psi_{\text{out}}(x_1) \Phi_{\text{out}}(x_2) | p_1 p_2^{\text{in}} \rangle \\ & = -i \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \int e^{i p_1' x_1 + i p_2' x_2} \frac{d^3 x_1 d^3 x_2}{(2\pi)^3} \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t_2}} \langle 0' | \Psi^{\text{r}}(x_1) \Phi^{\text{r}}(x_2) | p_1 p_2^{\text{in}} \rangle \end{aligned} \right.$$

Por meio do teorema de Gauss

$$\begin{aligned} \int d^4 x_2 e^{i p_2' x_2} (\square_2 + \mu^2) \langle 0' | T \Psi^{\text{r}}(x_1) \Phi^{\text{r}}(x_2) | p_1 p_2^{\text{in}} \rangle &= \\ &= - \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \int e^{i p_2' x_2} \frac{\partial}{\partial t_2} \langle 0' | \Phi^{\text{r}}(x_2) \Psi^{\text{r}}(x_1) | p_1 p_2^{\text{in}} \rangle d^3 x_2 \\ + \lim_{t_2 \rightarrow -\infty} \int e^{i p_2' x_2} \frac{\partial}{\partial t_2} \langle 0' | \Psi^{\text{r}}(x_1) \Phi^{\text{r}}(x_2) | p_1 p_2^{\text{in}} \rangle d^3 x_2 & \quad (\text{II.19}) \end{aligned}$$

Lembrando-se que  $p_2'^2 = \mu^2$ .

Utilizando mais uma vez o teorema de Gauss com respeito às variáveis  $x_1$  com  $\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_1}} (\gamma^u p_1^u - m) = 0$ , temos finalmente

$$S_{p_1' p_2' p_1 p_2} = \langle p_1' p_2^{\text{in}} | p_1 p_2^{\text{in}} \rangle + \int \frac{d^4 x_1 d^4 x_2}{(2\pi)^3} e^{i p_1' x_1 + i p_2' x_2} (\square_2 + \mu^2) \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_1}} (\gamma^u p_1^u - m) \langle 0' | T \Psi^{\text{r}}(x_1) \Phi^{\text{r}}(x_2) | p_1 p_2^{\text{in}} \rangle$$

que é a conhecida fórmula de redução de L.S.Z. (3,19,20).

Escrevendo

$$S_{p_1' p_2' p_1 p_2} = \langle p_1' p_2^{\text{in}} | p_1 p_2^{\text{in}} \rangle + i \delta^4 (p_1' + p_2' - p_1 - p_2) A(s, t) \quad (\text{II.21})$$

onde  $A(s, t)$  é a amplitude invariante de espalhamento com

$$A(s, t) = i \frac{\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_1}} (\gamma^u p_1^u - m)}{2(2\pi)^3} (p_2'^2 - \mu^2) (p_1^u \gamma^u - m) \Psi^{\text{r}} | p_1 p_2(q') u^i \quad (\text{II.22})$$

onde  $q' = \frac{p_1' - p_2'}{2}$  e



$$\begin{aligned} \langle 0' | T \psi^{\mathbf{r}}(x_1) \phi^{\mathbf{r}}(x_2) | p_1 p_2 \text{ in} \rangle &= \hat{\psi}(x_1 x_2) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^8} \int_{\delta^4} (p_1'' p_2'' - p_1 - p_2) \hat{\psi}_{p_1 p_2}^{\mathbf{r}}(q'') e^{-ip_1'' x_1 - ip_2'' x_2} d^4 p_1'' d^4 p_2'' u^j \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

A despeito do fato de  $p_2'^2 = \mu^2$ ,  $p_1'^2 = m^2$ , (II.22) não é nula já que, como logo veremos,  $\hat{\psi}^{\mathbf{r}}(a')$  é singular nestes pontos.

A equação (II.20) mostra que o problema do espalhamento meson-nucleon ficará resolvido uma vez conhecida a amplitude  $\langle 0' | T \psi^{\mathbf{r}}(x_1) \phi^{\mathbf{r}}(x_2) | p_1 p_2 \text{ in} \rangle$ . Para calculá-la faremos uso do M.T.D. à muitos tempos.

## 2- CÁLCULO NA ORDEM MAIS BAIXA

Da equação (II.1b) obtemos

$$\left( i \not{\partial}_x - m \right) \langle 0' | T \psi^{\mathbf{r}}(x) \phi(y) | p_1 p_2 \text{ in} \rangle = \langle 0' | T \left\{ \not{\partial}_x \psi(x) \phi(x) - \delta_m \psi(x) \right\} \phi(y) | p_1 p_2 \text{ in} \rangle \quad (\text{II.24a})$$

Invertendo a equação (II.24a) por meio da função de green de Feynman correspondente à massa física  $m$

$$S_F(x) = \frac{\not{\partial}}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip \cdot x} \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon} \quad \left\{ \not{p} = \not{p}_u \right\}^u \quad (\text{I.25})$$

semos levados à

$$\begin{aligned} \langle 0' | T \psi^{\mathbf{r}}(x) \phi(y) | p_1 p_2 \text{ in} \rangle &= \psi_0(x, y) + \\ &+ \int S_F(x-x') \langle 0' | T \left\{ \not{\partial}_{x'} \psi(x') \phi(x') - \delta_m \psi(x') \right\} \phi(y) | p_1 p_2 \text{ in} \rangle d^4 x' \end{aligned} \quad (\text{II.24b})$$

onde o termo inhomogêneo  $\psi_0$  representa uma onda plana de partículas incidentes com a massa física. No caso de uma teoria do tipo de Heisenberg onde a self-massa é finita, poderia ser mais conveniente usar a função de green correspondente à massa 'bare' para invertir a equação (II.24a). (vide Heisenberg<sup>(8)</sup> e cap. IV).

A ideia básica do M.T.D. à muitos tempos consiste em admitir que a função de 3 pontos no integrando de (II.24b) possui aproximadamente a mesma estrutura formal que a função de 3 pontos da teoria livre i.e. que ela pode ser aproximada por um produto de uma função de dois pontos por uma de um ponto. Esta hipótese é menos restritiva que a da teoria de perturbações a qual na ordem mais baixa aproximaria a função de 3 pontos pela correspondente função livre.

Matematicamente a aproximação T.D. é obtida reescrevendo-se o produto cronológico no integrando de (II.24b) em termos do produto normal, por meio da regra de Wick (eq. I.21) e negligenciando um produto normal de um número suficientemente grande de operadores. As considerações feitas na Introdução quanto ao caráter aproximado desta definição de produto normal, mostram que seria desejável levar em conta as correlações de dois pontos exatamente, já que as mais elevadas são pela própria definição de produto normal tratadas aproximadamente, já que as mais elevadas são pela própria definição de produto normal tratadas aproximadamente. Isto é contudo impossível, e como uma primeira etapa aproximaremos as correlações de dois pontos (propagadores) por seus valores livres com a massa física. Mais tarde esta aproximação poderá ser melhorada mediante o uso de resultados da teoria de perturbações para estes propagadores ou resolvendo-se em sua ordem mais baixa a equação não linear que o método Tam-Dancoff dá para a determinação dos propagadores. Assim usaremos como função de contração

$$\underline{\underline{\phi}}(x)\underline{\underline{\phi}}(y) = \langle 0' | T\phi(x)\phi(y) | 0' \rangle = \Delta_F(x-y) \underline{\underline{\phi}}_F(x-y) = \frac{i}{2(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot (x-y)} \quad (II.26)$$

A aproximação mais baixa para o problema meson-nucleon será obtida desprezando o produto normal de 3 ou mais operadores, a não ser no termo que aparece multiplicado por  $\delta_m$  onde um produto normal de 2 operadores será desprezado. Esta regra que corresponde à tratar  $\delta_m$  como se fosse uma correção de ordem mais elevada é necessária para a introdução de um formalismo de renormalização de massa consistente, e constitui a modificação essencial que o M.T.D. à muitos tempos empregado por Heisenberg deve sofrer para poder ser utilizado numa teoria divergente. (Note-se que considerar o termo com  $\delta_m$  equivale à utilizar uma função de Feynman com massa 'bare' na inversão da equação (II.24a))

Obtemos assim à partir de (II.24b)

$$\underline{\underline{\psi}}(x_1, y) = \underline{\underline{\psi}}_0(x_1, y) + g_0 \int S_F(x - x') \Delta_F(y - x') \langle 0' | \Psi(x') | p_1 p_2 \text{ in} \rangle d^4 x' \quad (II.27)$$

Usando agora a eq. IIIa

$$\{i \not{\partial} - m_0\} \langle 0' | \Psi(x) | p_1 p_2 \text{ in} \rangle = g_0 \langle 0' | \Psi(x) \underline{\underline{\phi}}(x) | p_1 p_2 \text{ in} \rangle \quad (II.28)$$

por conseguinte

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\psi}}(x, y) &= \underline{\underline{\psi}}_0(x, y) + g_0^2 \int S_F(x-x') \Delta_F(y-x') S_F^{(m_0)}(x'-x'') \langle 0' | \Psi(x'') \underline{\underline{\phi}}(x'') | p_1 p_2 \text{ in} \rangle d^4 x' d^4 x'' \\ &= \underline{\underline{\psi}}_0(x, y) + g_0^2 \int S_F(x-x') \Delta_F(y-x') S_F^{(m_0)}(x'-x'') \underline{\underline{\psi}}(x'', x'') d^4 x' d^4 x'' \end{aligned} \quad (II.29)$$

onde  $S_F^{(m_0)}$  é a função de Feynman com massa  $m_0$ . No espaço dos momenta com

$\underline{p} = p_1 + p_2$  e  $q = \frac{p_1 - p_2}{2}$  obtemos à partir de (II.29)

$$\Psi(q') = (2\pi)^5 \delta^4(q-q') + i \frac{g_0^2}{(2\pi)^4} S_F(\frac{p}{2}, q') \Delta_F(\frac{p}{2} - q') S_F^{(m_0)}(p) \int \Psi(q'') d^4 q'' \quad (II.30)$$

$$\text{com } S_F(p) = \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon}, \quad \Delta_F(k) = \frac{1}{k^2 - u^2 + i\epsilon}$$

ou seja

$$\int \Psi(q'') d^4 q'' = \frac{(2\pi)^5}{1 - g_0^2 \frac{\sum(p)}{\not{p} - m_0}} \quad (II.31)$$

onde

$$\sum(p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int S_F(\frac{p}{2} - q'') \Delta_F(\frac{p}{2} - q'') d^4 q'' \quad (II.32)$$

logo

$$\Psi(q') = (2\pi)^5 \delta^4(q-q') + i \frac{g_0^2}{(2\pi)^4} S_F(\frac{p}{2} + q') \Delta_F(\frac{p}{2} - q') \frac{(2\pi)^5}{\not{p} - m_0 - g_0^2 \sum(p)} \quad (II.33)$$

e finalmente a amplitude de espalhamento é dada por (vide II.22)

$$A = - \frac{g_0^2}{(2\pi)^2} \bar{u}^i \frac{1}{\not{p} - m_0 - g_0^2 \sum(p)} u^j \quad (II.34)$$

onde na última passagem fizemos uso do fato que a equação integral (II.29,30) possui um kernel (vide fig.1) que não contém termos de renormalização de função de onda, logo por consistência temos  $\Psi = \Psi \Phi = \frac{1}{2}$ , nesta aproximação.

A integral (II.32) coincide com a aproximação perturbativa mais baixa à self-energia do nucleon, sendo portanto divergente. A equação (II.34) contém conseqüentemente expressões divergentes e deve ser renormalizada de modo que somente quantidades observáveis finitas intervenham.

Escrevendo

$$\sum(p) = \sum(m) + (\not{p} - m) \frac{\partial \sum(m)}{\partial \not{p}} + R(p) (\not{p} - m) \quad \begin{cases} R(m) = 0 \\ R(p) \text{ finita} \end{cases} \quad (II.35)$$

com  $m_0 = m - \delta m$ , re-escreveremos (II.34) como

$$A = - \frac{g_1^2}{(2\pi)^2} \bar{u}^i \frac{1}{(\not{p} - m)(1 - g_1^2 \frac{\partial \sum(m)}{\partial \not{p}})} u^j \quad (II.36)$$

$$\text{onde } \delta m = \sum(m) \quad g_1^2 = g_0^2 / (1 - g_0^2 \frac{\partial \sum(m)}{\partial \not{p}}) \quad (II.37)$$

Interpretando  $g_1$  como sendo a constante de acoplamento observável, a eq.II.36 conterá somente quantidades finitas, e a amplitude assim obtida coincide com a que é dada pela teoria de perturbações renormalizada quando somamos todas as iterações da mais simples "meson-nucleon-bubble". É bem sabido que esta amplitude possui "ghost-poles"<sup>(21)</sup>. Como não sabemos se estes polos constituem uma falha do método de aproximação ou, mais provavelmente, um defeito intrínseco da teoria, o máximo que podemos fazer consiste em subtrai-los de acordo com um método apresentado por Redmond<sup>(22)</sup>, e cujo significado físico está aberto à várias conjecturas<sup>(23,24)</sup>. Procedendo-se deste modo, uma dependência não analítica contendo singularidades essenciais na constante de acoplamento é introduzida na amplitude de espalhamento.

Do mesmo modo como usamos a eq.II.1 para o campo fermionico como ponto de partida na obtenção da equação integral (II.29), poderíamos ter utilizado a eq.II.2 para o campo de bosons, levando nesta 1ª ordem aos mesmos resultados.

### 3 - EXTENSÃO A ORDENS MAIS ELEVADAS

Para ir à aproximações mais elevadas devemos aplicar mais uma vez as equações de movimento a fim de obter amplitudes contendo um maior número de operadores,

Assim aplicando a equação (II.1b) à amplitude com dois pions presente no integrando de (II.24b) e invertendo por meio da função de Feynman temos,

$$\begin{aligned} \langle 0' | T \Psi(x') \Phi(x') \Phi(y) | p_1 p_2 \text{ in} \rangle &= \\ &= \int S_F(x'-x'') \langle 0' | T \left\{ \epsilon_0 \bar{\Psi}(x'') \Phi(x'') - \right. \\ &\quad \left. - \delta_m \Psi(x'') \right\} \Phi(x') \Phi(y) | p_1 p_2 \text{ in} \rangle d^4 x'' \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

Efetuada as contrações no integrando de (II.39), e abandonando os produtos normais de mais de 3 operadores, (a não ser nos termos multiplicados por  $\delta_m$  onde negligenciamos um produto normal de 3 operadores) obtemos

$$\begin{aligned} \langle 0' | T \Psi(x') \Phi(x') \Phi(y) | p_1 p_2 \text{ in} \rangle &= \epsilon_0 \int S_F(x'-x'') \Delta_F(x''-x') \bar{\Psi}(x'', y) d^4 x'' + \\ &+ \epsilon_0 \int S_F(x'-x'') \Delta_F(x'-y) \bar{\Psi}(x'', x'') d^4 x'' + \epsilon_0 \int S_F(x'-x'') \Delta_F(y-x'') \bar{\Psi}(x'', x') d^4 x'' - \\ &- \delta_m \int S_F(x'-x'') \Delta_F(x'-y) \langle 0' | \Psi(x'') | p_1 p_2 \text{ in} \rangle d^4 x'' \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

Introduzindo (II.39) em (II.24b), usando (II.28) e efetuando a transformação de Fourier do resultado,

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(q') &= (2\pi)^5 \delta^4(q-q') + \frac{1}{p' - m} \left\{ \epsilon_0^2 \sum (p_1') - \delta_m \right\} \bar{\Psi}(q') + \\ &+ i \frac{\epsilon_0^2}{(2\pi)^4} S_F(p_1') \Delta_F(p_2') \int \bar{\Psi}(q'') d^4 q'' + \frac{i \epsilon_0^2}{(2\pi)^4} S_F(p_1') \Delta_F(p_2') \cdot \\ &\quad \cdot \int S_F(q'+q'') \bar{\Psi}(q'') d^4 q'' \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

O kernel desta equação integral está representado graficamente na fig. 2.

De (II.40) passamos à

$$\begin{aligned} \Psi(q') = & \mathcal{E}_2^{-1/2} (2\pi)^5 \delta^4(q-q') + \frac{i\mathcal{E}_1^2}{(2\pi)^4} \beta(p_1') \Delta_F(p_2') \mathcal{P}(p) \int \Psi(q'') d^4q'' + \\ & + \frac{i\mathcal{E}_1^2}{(2\pi)^4} \beta(p_1') \Delta_F(p_2') \int S_F(q'+q'') \Psi(q'') d^4q'' \end{aligned} \quad (II.41)$$

onde o kernel de renormalização de função de onda (o último da fig.2) foi eliminado por divisão com o conseqüente aparecimento de um fator  $\mathcal{E}_2^{-1/2}$  multiplicando o termo inhomogeneo.  $\mathcal{E}(p)$  é o propagador corrigido na ordem mais baixa iterada (vide II.34,36).

$$\mathcal{E}_1^2 \mathcal{E}(p) = \frac{\mathcal{E}_0^2}{p - m_0 - \mathcal{E}_0^2 \sum (p)} = \frac{\mathcal{E}_1^2}{(p - m) (1 - \mathcal{E}_1^2 \mathcal{R}(p))} \quad (II.42)$$

Como já observado, este propagador contém 'ghost-poles' que devem ser eliminados. Como ele contribui somente à correções radiativas 'segundas' podemos também tomar a posição simplificada de substituí-lo por um propagador livre.

Nesta aproximação T.D. a consistência exige que coloquemos  $\Psi^{\pm} = \mathcal{E}_2^{-1/2} \psi, \psi^{\pm} = \mathcal{E}_2^{1/2} \Psi$ .

Escrevendo

$$\begin{aligned} \frac{\Psi^{\pm}(q')}{(2\pi)^5} = & \left\{ \delta^4(q-q') + i \frac{\mathcal{E}_1^2}{(2\pi)^4} \beta(p_1') \Delta_F(p_2') \mathcal{T}(p, q, q') + \frac{i\mathcal{E}_1^2}{(2\pi)^4} \right. \\ & \left. \beta(p_1') \Delta_F(p_2') \mathcal{Q}(p, q'') \mathcal{A}(p, q) \right\} \end{aligned} \quad (II.43)$$

em

$$\mathcal{A}(p, q) = \frac{2(\pi)^{-5}}{p - m_0} \int \Psi^{\pm}(q'') d^4q'' \quad (II.44)$$

obtemos introduzindo (II.43) em (II.41)

$$\mathcal{T}(p, q, q') = S_F(q'+q) + \frac{i\mathcal{E}_1^2}{(2\pi)^4} \int S_F(q''+q') \mathcal{E}(\frac{p}{2} + q'') \Delta_F(\frac{p}{2} - q'') \mathcal{T}(p, q, q'') d^4q'' \quad (II.45)$$

$$\mathcal{Q}(p, q') = 1 + \frac{i\mathcal{E}_1^2}{(2\pi)^4} \int S_F(q''+q') \mathcal{E}(\frac{p}{2} + q'') \Delta_F(\frac{p}{2} - q'') \mathcal{Q}(p, q'') d^4q'' \quad (II.46)$$

Introduzimos agora  $\bar{\mathcal{T}}(p, q, q')$  tal que

$$\bar{\mathcal{T}}(p, q, q') = \mathcal{T}(p, q', q) \quad (II.47)$$

satisfazendo

$$\bar{\mathcal{T}}(p, q, q') = S_F(q'+q) + \frac{i\mathcal{E}_1^2}{(2\pi)^4} \int \bar{\mathcal{T}}(p, q, q'') \mathcal{E}(\frac{p}{2} + q'') \Delta_F(\frac{p}{2} - q'') S_F(q'+q'') d^4q'' \quad (II.48)$$

De (II.45,46,47) obtemos

$$\lim_{q' \rightarrow \infty} T(p, q, q') \hat{q} = \zeta(p, q') \quad (\text{II.49})$$

$$\lim_{q' \rightarrow \infty} q' T(p, q, q') = \lim_{q' \rightarrow \infty} \hat{q}' \hat{T}(p, q', q) = \zeta(p, q) \quad (\text{II.50})$$

onde  $\zeta$  satisfaz à

$$\zeta(p, q') = 1 + \frac{i \varepsilon_1^2}{(2\pi)^4} \int \zeta(p, q'') \beta \left( \frac{p}{2} + q'' \right) \Delta_p \left( \frac{p}{2} - q'' \right) S_p(q' + q'') d^4 q'' \quad (\text{II.51})$$

A solução iterativa das eqs. II.45,46, é finita correspondendo à gráficos da fig.3. Por outro lado a solução iterativa das eqs. II.46,51 leva à integrais com divergências ultra-violetas, graficamente representadas na fig.4.

De (II.48) obtemos

$$D(t, q') = \zeta(t, t/2) + \frac{i \varepsilon_1^2}{(2\pi)^4} \left\{ S_p(q' + q'') - S_p\left(\frac{t}{2} + q''\right) \right\} \beta \left( \frac{t}{2} + q'' \right) \Delta_p \left( \frac{t}{2} - q'' \right) \cdot \zeta(t, q'') d^4 q'' \quad (\text{II.52})$$

$$\zeta(t, q'') = 1 + \frac{i \varepsilon_1^2}{(2\pi)^4} \int \left\{ S_p(q' + q'') - S_p\left(\frac{t}{2} + q''\right) \right\} \beta \left( \frac{t}{2} + q'' \right) \Delta_p \left( \frac{t}{2} - q'' \right) \zeta(t, q'') d^4 q'' \quad (\text{II.53})$$

onde

$$\zeta(t, q') = \zeta(t, q') \left[ \zeta(t, t/2) \right]^{-1} \quad (\text{II.54})$$

A equação (II.53) possui uma solução iterativa finita em virtude do termo de convergência adicional no kernel. De (II.46,53,54), escrevendo

$$\zeta(p, q') = C(t, q') + D(p, t, q') = \zeta(p, q') \left[ \zeta(t, t/2) \right]^{-1} \quad (\text{II.55})$$

encontramos

$$D(p, t, q') = \frac{i \varepsilon_1^2}{(2\pi)^4} \int S_p(q' + q'') \left[ \beta \left( \frac{p}{2} + q'' \right) \Delta_p \left( \frac{p}{2} - q'' \right) - \beta \left( \frac{t}{2} - q'' \right) \Delta_p \left( \frac{t}{2} - q'' \right) \right] \cdot C(t, q'') d^4 q'' \quad (\text{II.56})$$

$$+ \frac{i \varepsilon_1^2}{(2\pi)^4} \int S_p(q' + q'') \beta \left( \frac{p}{2} + q'' \right) \Delta_p \left( \frac{p}{2} - q'' \right) D(p, t, q'') d^4 q''$$

O termo inhomogeneo da eq.II.56 comporta-se como  $\log q'/q'$  para  $q' \rightarrow \infty$ , o que implica uma solução iterativa finita. Argumentos semelhantes podem ser aplicados à  $\zeta(p, q')$  levando à

$$\zeta(p, q') = \zeta(t, t/2) \zeta(p, q') \quad (\text{II.57})$$

que é finito. Uma vez que a possibilidade de obter valores finitos para  $\zeta(p, q')$  após a extração de uma constante multiplicativa infinita ficou mostrada através de (II.53,56), podemos na prática utilizar (II.49) para calcular  $\zeta(p, q')$ .

Deste modo, usando também (II.47) o nosso problema se reduz à solução de uma só equação integral, a saber (II.48)

Por razões de invariância relativística temos  $\zeta(t, t/2) = \zeta(1 + \lambda \underline{Z})$ . Para  $t^2 = m^2$  podemos contudo considerar  $\zeta(t, t/2) = \zeta(1 + \lambda) = \zeta(m, \frac{m}{2})$  desde <sup>m</sup> que tenhamos consistentemente  $\underline{Z} = m$  em todas formulas finais.

Usando (II.43,44) encontramos agora

$$A(p, q) = \left\{ \frac{1}{p^2 - m^2 - \frac{i \epsilon_1^2}{(2\pi)^4} \int \beta \left( \frac{p}{2} + q'' \right) \Delta_F \left( \frac{p}{2} - q'' \right) \zeta(p, q'') d^4 q''} \right\} \cdot \quad (II.58)$$

$$\cdot \left\{ 1 + \frac{i \epsilon_1^2}{(2\pi)^4} \int \beta \left( \frac{p}{2} + q'' \right) \Delta_F \left( \frac{p}{2} - q'' \right) T(p, q, q'') d^4 q'' \right\}$$

Da equação (II.48) usando (II.50) segue-se

$$1 + \frac{i \epsilon_1^2}{(2\pi)^4} \int \beta \left( \frac{p}{2} + q'' \right) \Delta_F \left( \frac{p}{2} - q'' \right) T(p, q, q'') d^4 q'' = \quad (II.59)$$

$$= \lim_{\epsilon_1' \rightarrow \infty} \epsilon_1' T(p, q, q') = \zeta(p, q)$$

Introduzindo

$$\sum^*(p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \beta \left( \frac{p}{2} + q'' \right) \Delta_F \left( \frac{p}{2} - q'' \right) \zeta(p, q'') d^4 q'' \quad (II.60)$$

encontramos

$$\frac{\sum^*(p)}{\zeta(m, \frac{m}{2})} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \beta \left( \frac{p}{2} + q'' \right) \Delta_F \left( \frac{p}{2} - q'' \right) \zeta(p, q'') d^4 q'' = \mathcal{A}(p) \quad (II.61)$$

A integral (II.61) é divergente e como integrando é finito seríamos tentados à decompô-la como em (II.35) a fim de extrair sua parte finita. Acontece contudo que um tal método falha neste caso em virtude das chamadas divergências 'overlapping' <sup>(25)</sup>. Para compreender este fato com maior clareza escrevemos  $\sum^*$  como uma integral dispersiva

$$\sum^*(p) = \int \frac{\rho(\sigma) d\sigma}{p^2 - \sigma^2} \quad (II.62)$$

Desde a condição de unitariedade na aproximação de 'não produção' <sup>(24, 27)</sup> (ou sua aproximação para energias abaixo do 'threshold' de produção)

$$I_{\Sigma}^{-1}(s) = \tilde{K}_F(s) = \tilde{K}^{-1}(s) \rho_0(s) Q^{\tilde{F}}(s) \tag{II.63}$$

onde  $\rho_0$  é a função espectral de ordem mais baixa, i.e. a função espectral de  $\sum$  eq. II.32 e  $Q^{\tilde{F}}(s) = Q(s, q)$  com  $(\frac{s^u}{2} + q^u)^{1/u} = s$  e  $(\frac{s}{2} - q)^{1/2} = u^{\frac{1}{2}}$

$\tilde{K}$  é o adjunto de  $K$  e difere de  $K$  por ser anti-causal ( $i^+ - i^-$ ).

Temos assim:

$$I(s) = \tilde{Q}(n, \frac{s}{2}) Q(n, \frac{s}{2}) C^{-\tilde{F}}(s) \rho_0(s) C^{\tilde{F}}(s) \tag{II.64}$$

De (II.64) segue-se que após a extração do fator  $\tilde{Q}(n, \frac{s}{2}) Q(n, \frac{s}{2})$  de  $\sum^{-1}(p)$  sua função espectral será finita e se comportará para  $s \rightarrow \infty$  como  $\frac{1}{s^2} \rho_0(s)$  vezes ter os logaritmos que vem de  $\tilde{C}$  e  $C$ . Assim, (pelo menos em expansão perturbativa) duas subtrações serão suficientes para tornar  $\frac{\sum^{-1}(p)}{\tilde{Q}(n, \frac{s}{2}) Q(n, \frac{s}{2})}$  finita. Destas

$$\tilde{Q}(n, \frac{s}{2}) Q(n, \frac{s}{2})$$

considerações segue-se que

$$\begin{aligned} \tilde{K}^{-1}(q') &= (2\pi)^5 \delta^4(q-q') + i \frac{G_1^2}{1} (2\pi) F(p')_{\Delta} (p') T(p, q, q') + \\ &+ i \frac{G_2^2}{2} (2\pi) F(p')_{\Delta} (p') C(p, q') B'(p) \tilde{C}(p, q) \end{aligned} \tag{II.65}$$

com

$$B'(p) = \frac{1}{(\not{p}-m)(1-G_2^2 B'(p))} \tag{II.66}$$

sendo o propagador em segunda correção T.D. e

$$G_2^2 = \frac{1}{1 - \frac{G_1^2}{1} \frac{Q(n, \frac{s}{2})}{C(n)}}, \quad n = u_0 + \frac{G_1^2}{1} \sum (n) \tag{II.67}$$

$$B'(p) = \frac{(\not{p}-m)^{-1}}{\tilde{Q}(n, \frac{s}{2})} \left[ \not{p}(p) - \not{m} - (\not{p}-m) \frac{Q(n)}{\not{p}} \right] = \tag{II.68}$$

$$= (\not{p}-m)^{-1} \left[ \tilde{C}(t, t/2) - \frac{1}{(2\pi)^4} \tilde{C}(t, q') F(\frac{t}{2} + q')_{\Delta} (\frac{t}{2} - q')_{\Delta} (q'+t/2) \delta^4(q'') \right]$$

$$\left[ \not{p}(p) - \not{m} - (\not{p}-m) \frac{Q(n)}{\not{p}} \right]$$

com  $\not{p}(p)$  dado por (II.61).



Na aproximação considerada é consistente tomarmos  $g^2 = g'^2$  igual à constante de acoplamento observável, já que elas diferem por efeitos de ordem mais elevada que as incluídas na presente aproximação.

O propagador  $B'(p)$  conterá, pelo menos para uma expansão perturbativa de  $R'$ , 'ghost poles' que devem ser eliminados como anteriormente. As funções  $C$  e  $\tilde{C}$  são claramente vértices renormalizados com correções radiativas incluídas.

A amplitude de espalhamento é dada nesta ordem por

$$A = - \frac{1}{(2\pi)^4} \bar{u}^i \left[ g^2_2 T(p, q, q') + g^2_2 C(p, q') B'(p) \tilde{C}(p, q) \right] u^j \quad (II.69)$$

Para tê-la explicitamente a solução da equação (II.45) deverá ser procurada.

A estrutura formal das equações integrais obtidas na segunda aproximação do E.T.D. à muitos tempos, é muito semelhante à das equações obtidas por Dalitz e Dysis<sup>(7)</sup> por meio do novo método à um tempo, tendo as nossas a vantagem de sua forma explicitamente covariante, o que possibilitou a introdução de um esquema de renormalização livre da ambiguidade encontrada por estes autores.

Na exposição feita acima obtivemos a segunda aproximação usando duas vezes sucessivas a equação para o campo fermionico. Na mesma ordem de aproximação existe no todo seis maneiras diferentes de aplicar as equações de movimento, levando cada uma delas à um kernel diferente. Uma simples análise mostra que a nossa escolha é a obtida usando em primeiro lugar a equação para o campo bosonico, e em seguida a equação para o campo de anti-fermions, correspondem à kernels descrevendo o maior número de processos. Estas duas possibilidades diferem somente na parte de renormalização de função de onda que no primeiro caso atua sobre o fermion e no segundo sobre o boson, podemos facilmente passar de uma para a outra mediante a substituição em nossas formulas  $B(p) \rightarrow S_p(p)$ ,  $A_p(p) \rightarrow L(p)$ , onde  $L(p)$  é o propagador corrigido (e 'ghost' subtraído) do boson.

Logo à ordens mais elevadas (para fixar ideias mediante a aplicação da equação de movimento sempre ao campo fermionico), e deixando de lado para o momento os termos de renormalização de massa  $m$ , que serão reintroduzidos nos lugares apropriados, vemos que usando a equação de movimento  $n$  vezes obtemos uma relação entre a amplitude de  $n+1$  bosons e a amplitude de  $n$  bosons. Escrevendo a amplitude  $n+1$  bosons sob a forma de produto normal, negligenciando o produto normal de  $n+1$  operadores bosonicos, e re-escrevendo o restante novamente sob forma de um produto cronológico, obtemos assim uma conexão entre a  $n-1$  amplitude e a  $n$  amplitude.

Introduzindo agora este resultado na  $n-1$  esima equação obtemos uma equação integral para a amplitude com  $n-1$  bosons. Usando agora as equações 1 até  $n-2$ , podemos uma após resolvida a equação integral calcular todas as amplitudes até chegarmos àquela com um boson. Uma simples análise gráfica destas equações mostra que mesmo em ordens arbitrariamente elevadas certos processos nunca são incluídos como por exemplo o espalhamento virtual de mesons por meio da formação de pares de  $n$  elétrons-anti-núcleon, que representa uma correção ao propagador de dois mesons.

Isto está relacionado com o fato já mencionado da inadequação de nossa definição de produto normal. É possível que usando uma ordem conveniente na aplicação das possíveis equações de movimento os erros provenientes desta definição de produto normal possam ser diminuídos, mas é duvidoso que possamos eliminá-los completamente.

Estas questões bem como um estudo do problema da renormalizabilidade geral do método à muitos tempos serão tratadas numa nota posterior. Para completar mencio<sub>me</sub>mos que a renormalização em ordens mais elevadas exigirá possivelmente a introdução de contra-termos  $\phi^3$ ,  $\phi^4$ , na lagrangeana. (Para um campo pseudo-escalar é claro que somente um termo  $\phi^4$  é necessário.)

AS DIVERGÊNCIAS DE VÁCUO NO VELHO N.T.D.

Tendo apresentado na Introdução um apanhado geral dos Métodos Tamm-Dancoff e no segundo capítulo a aplicação do menos conhecido método à muitos tempos à teorias mesônicas, começaremos agora um estudo comparativo das várias versões do N.T.D. por meio de modelos solúveis.

Neste capítulo analisaremos problemas relacionados com divergências de vácuo (volume) no velho método Tamm-Dancoff, e sua eliminação seja por meio do novo método de Dyson,<sup>(5)</sup> seja por uma modificação apropriada do velho sistema de equações

A relação destas questões com o teorema de Haag<sup>(9)</sup> será apresentada.

Finalmente o comportamento das novas e velhas amplitudes quando o número de operadores tende ao infinito será estudado em nosso modelo.

Na procura de um modelo onde os problemas que nos propomos à estudar possam ser facilmente tratados, devemos ter em mente que o ponto essencial é a diferença entre os vacua 'bare' e físico. Escolhemos portanto um exemplo no qual os processos de vácuo são os únicos presentes e formulamo-lo em termos da hamiltoniana bilinear

$$H = H_0 + H_{int} = \int w(k) a_k^+ a_k d^3k + \int g(k) \{ a_k^+ a_{-k}^+ + a_k a_{-k} \} d^3k \quad (III.1)$$

$$g(k) = g(-k), \quad g^*(k) = g(k), \quad 2|g(k)| < w(k)$$

onde  $a_k^+$  e  $a_k$  são resp. operadores (bare) de criação e aniquilação satisfazendo

$$[a_k, a_{k'}^+] = \delta^3(k-k'), \quad [a_k, a_{k'}] = 0, \quad [a_k^+, a_{k'}^+] = 0 \quad (III.2)$$

Introduzindo  $b_k^+$  e  $b_k$  por meio da transformação canônica

$$a_k^+ = \cosh \theta_k b_k^+ + \sinh \theta_k b_{-k} \quad (III.3)$$

$$a_k = \cosh \theta_k b_k + \sinh \theta_k b_{-k}^+$$

•

$$\tanh 2\theta_k = -\frac{2g(k)}{w(k)} \quad (III.4)$$

obtemos a diagonalização da hamiltoniana (III.1)

$$H = \int \sqrt{w_k^2 - 4g_k^2} b_k^+ b_k d^3k + \frac{\zeta^3(0)}{2} \left( \left\{ \sqrt{w_k^2 - 4g_k^2} - w_k \right\} d^3k \right) \quad (III.5)$$

onde

$$\zeta^3(0) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{V}{(2\pi)^3} \quad (III.6)$$

e  $V$  é o volume de quantização.

Procuramos agora o estado fundamental da hamiltoniana (III.1) i.e. o vácuo físico de nosso modelo. De (III.5) vemos que este será dado por um estado  $|0'\rangle$  tal que  $b_k|0'\rangle = 0$ . Experimentemos para  $|0'\rangle$  a expansão

$$|0'\rangle = N^{-1} \left\{ |0\rangle + \int f_1(k_1) a_{k_1}^+ a_{-k_1}^- |0\rangle d^3k_1 + \dots + \right. \\ \left. + \int f_n(k_1, \dots, k_n) a_{k_1}^+ a_{-k_1}^- \dots a_{k_n}^+ a_{-k_n}^- |0\rangle d^3k_1 \dots d^3k_n + \dots \right\} \quad (III.7)$$

onde  $|0\rangle$  é o vácuo 'bare' com  $a_k|0\rangle = 0$ , e  $N^{-1}$  uma constante de normalização.

Invertendo (III.3) segue-se

$$b_k^+ = a_k^+ \cosh \theta_k - a_{-k}^- \sinh \theta_k \quad (III.8)$$

$$b_k = a_k \cosh \theta_k - a_{-k}^+ \sinh \theta_k$$

logo

$$b_k|0'\rangle = \left( \cosh \theta_k (2f_1(k) a_k^+ + \int f_2(k_1, k) a_{k_1}^+ a_{-k_1}^- a_k^+ d^3k_1 + \dots \right. \\ \left. \dots + 2f_n(k_1, \dots, k_{n-1}, k) a_{k_1}^+ a_{-k_1}^- \dots a_{k_{n-1}}^+ a_{-k_{n-1}}^- + \dots \right. \\ \left. - \sinh \theta_k (a_k^- + \int f_1(k_1) a_{k_1}^+ a_{-k_1}^- a_k^- d^3k_1 + \dots) \right) \frac{|0\rangle}{N} = 0 \quad (III.9)$$

donde

$$f_1(k) = \frac{1}{2} \operatorname{tgh} \theta_k = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{w_k - \sqrt{w_k^2 - 4g_k^2}}{2\epsilon_k} \right\}$$

·  
·  
·

$$f_n(k_1, \dots, k_n) = \frac{1}{2^n n!} \left\{ \operatorname{tgh} \theta_{k_1} \dots \operatorname{tgh} \theta_{k_n} \right\} \quad (III.10)$$

Devemos agora determinar  $N$  de modo a ter  $\langle 0'|0'\rangle = 1$ . Para isto quantizemos preliminarmente o nosso sistema num volume finito  $V$ , o que implica na substituição de todas as integrais por somatorias. O limite  $V \rightarrow \infty$  será tomado finalmente reproduzindo o caso acima.

$$\text{Introduzindo } \alpha(k) = \exp \left\{ \operatorname{tgh} \theta_k a_k^+ a_{-k}^- \right\} = 1 + \operatorname{tgh} \theta_k a_k^+ a_{-k}^- + \dots + \frac{(\operatorname{tgh} \theta_k a_k^+ a_{-k}^-)^n}{n!} + \dots \\ \alpha(0) = \exp \left\{ \frac{\operatorname{tgh} \theta_0 a_0^+ a_0^-}{2} \right\} = 1 + \frac{\operatorname{tgh} \theta_0 a_0^+ a_0^-}{2} + \dots + \frac{(\operatorname{tgh} \theta_0 a_0^+ a_0^-)^n}{2^n n!} + \dots \quad (III.11)$$

achamos após um cálculo simples comparando com (III.7,10)

$$N^{-1} \prod_{k>0} \alpha(k) \alpha(k) |0\rangle = N^{-1} \exp \left\{ \sum_k \frac{\operatorname{tgh} \theta_k}{2} a_k^+ a_{-k}^- \right\} |0\rangle = |0'\rangle \quad (III.12)$$

onde  $\prod$  indica um produto infinito que inclui somente uma vez a contribuição do  $k=0$  par  $\alpha(k)$  e  $\alpha(-k) = \alpha(k)$ .

Como os operadores  $\alpha$  são independentes

$$\langle 0' | 0' \rangle = \frac{1}{N^2} \langle 0 | \alpha^\dagger(0) \alpha(0) \prod_{k>0} \alpha^\dagger(k) \alpha(k) | 0 \rangle = \frac{1}{N^2} \langle 0 | \alpha^\dagger(0) \alpha(0) | 0 \rangle \prod_{k>0} \langle 0 | \alpha^\dagger(k) \alpha(k) | 0 \rangle \quad (\text{III.13})$$

De (III.11) obtemos

$$\langle 0 | \alpha^\dagger(0) \alpha(0) | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 - (\text{tgh } \theta_0)^2}} \quad (\text{III.14})$$

$$\langle 0 | \alpha^\dagger(k) \alpha(k) | 0 \rangle = \frac{1}{1 - (\text{tgh } \theta_k)^2}$$

e impondo  $\langle 0' | 0' \rangle = 1$  encontramos

$$\begin{aligned} N^{-1} &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \left( \frac{1}{2} \log(1 - (\text{tgh } \theta_0)^2) \right) + \sum_{k>0} \log(1 - (\text{tgh } \theta_k)^2) \right) \right\} = \quad (\text{III.15a}) \\ &= \exp \frac{1}{4} \left\{ \sum_k \log(1 - (\text{tgh } \theta_k)^2) \right\} \end{aligned}$$

Fazendo o limite  $V \rightarrow \infty$  obtemos formalmente

$$N^{-1} = \exp \left\{ \frac{d^3(0)}{4} \int d^3k \log(1 - (\text{tgh } \theta_k)^2) \right\} \quad (\text{III.15b})$$

Como  $\log(1 - (\text{tgh } \theta_k)^2) < 0$  concluímos que  $N^{-1}$  tende à zero neste limite e a expansão (III.7) perde então um significado matematicamente rigoroso. Com efeito formalmente  $|0'\rangle$  é ortogonal à qualquer vetor do espaço de Hilbert gerado à partir de  $|0\rangle$ , não podendo portanto pertencer à este espaço de Hilbert, fato que constitui a essência do teorema de Haag.

O resultado acima não é de modo algum uma particularidade do nosso modelo, mas uma propriedade geral de qualquer teoria relativística, como pode ser facilmente constatado usando a expressão conhecida<sup>(18)</sup>

$$|0'\rangle = \int (0, -\infty) |0\rangle \quad (\text{III.16})$$

onde

$$S(t_1, t_2) = T \left\{ \exp(-i \int_{t_2}^{t_1} H_I(t) dt) \right\} \quad (\text{III.17})$$

Da análise dos diagramas de Feynman correspondentes à (III.16) chega-se à conclusão que o fator de normalização  $N^{-1}$  é devido à contribuição de 'closed loops' podendo ser escrito como

$$N^{-1} = \exp \{ L \} \quad (\text{III.18})$$

onde  $L$  é uma soma sobre todos os 'connected closed loops'

$$L = \sum_n \int_V dV_1 \dots \int_V dV_n \int_{-\infty}^0 dt_1 \dots \int_{-\infty}^0 dt_n K_n(x_1-x_2, \dots, x_{n-1}-x_n) \quad (\text{III.19})$$

Decompondo  $L$  na sua parte real e imaginária obtemos

$$L = -i V t \mu - V \eta \left\{ \begin{array}{l} V \rightarrow \infty \\ t \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (\text{III.20})$$

onde  $\mu$  é a densidade de self-energia do vácuo e  $\eta > 0$ . A parte de um fator de fase irrelevante proveniente da parte imaginária é devido à diferença de energia entre o vácuo bare e o físico, tendo  $N^{-1}$  dependendo do volume como em nosso modelo.

Temos agora os elementos para uma 'prova ingenua' do teorema de Haag. A despeito de sua falta de rigor matemático decidimos apresentá-la já que as demonstrações usuais fazendo uso de uma matemática bastante elaborada, tendem a esconder para o não especialista, os poucos simples fatos físicos que constituem a base do teorema: O fato de que os processos de vácuo (criação virtual de pares) acontecem com uniformidade em toda a extensão do espaço implica em que a probabilidade de encontrar no vácuo físico  $n$  processos independentes é proporcional à  $V^n$ , e conseqüentemente no limite  $V \rightarrow \infty$  a probabilidade de encontrar um número finito de processos (ou equivalentemente um número finito de partículas 'bare') torna-se nula em virtude da contribuição dominante do número infinito de processos. Esta é a razão física da ortogonalidade  $|\hat{0}\rangle$  e os estados 'bare'.

Na sua forma mais simples o teorema de Haag afirma que se os operadores de uma teoria dos campos relativisticamente invariante coincidem num dado instante com os operadores de uma teoria livre, então eles coincidem em qualquer tempo e a primeira teoria é portanto livre também.

Podemos compreender este teorema já que: 1- numa teoria relativística com interação o vácuo bare é diferente do físico pois a hamiltoniana é formada em termos de operadores locais de campo que dependem tanto dos operadores de criação como de aniquilação. Existe portanto na parte de interação um termo contendo somente operadores de criação, que impede o vácuo 'bare' de ser um auto-estado, representando fisicamente a criação virtual de pares.

2- As considerações que fizemos acima indicam que os dois vacuos serão no caso de haver interação, não somente diferentes mas em verdade pertencendo a espaços de Hilbert distintos, em contradição com a hipótese de que os operadores das duas teorias coincidem num dado tempo, e portanto operam no mesmo espaço de Hilbert.

Esta contradição somente pode ser removida se não houver interação e portanto ambas as teorias são livres, como queríamos mostrar.

Este teorema não obstante sua importância na teoria axiomática dos campos e sua crescente aplicação a problemas mais práticos<sup>(23)</sup>, não impedirá com que um uso formal de uma expansão do tipo (III.7) leve a resultados corretos. Isto é devido ao fato de que para um volume de quantização finito as quantidades divergentes com o volume, como o fator de normalização  $N^{-1}$  e a self-energia do vácuo sofrem um cancelamento no cálculo dos observáveis (diferenças de energia amplitudes de espalhamento) subsistindo somente em etapas intermediárias.

Logo, mesmo no caso do volume de quantização infinito, resultados corretos serão obtidos desde que um suficiente cuidado seja tomado em se operando com expressões envolvendo  $\delta^3(0)$ , de maneira a obter um tal cancelamento.

Usando (III.7) e

$$H|0'\rangle = E_0|0'\rangle \quad (III.21)$$

obtemos (vide I.7) o velho sistema T.D. para o vácuo físico

$$\begin{aligned} E_0 &= 2\delta^3(0) \int f_1(k_1)g(k_1)d^3k_1 \\ (E_0 - 2w_{k_1})f_1(k_1) &= g(k_1) + 4\delta^3(0) \int f_2(k_1, k_2)g(k_2)d^3k_2 + 8f_2(k_1, k_1)g(k_1) \\ &\vdots \\ (E_0 - 2(w_{k_1} + \dots + w_{k_n}))f_n(k_1, \dots, k_n) &= (f_{n-1}(k_1, \dots, k_{n-1})g(k_n))_s + \\ &+ 2(n+1)\delta^3(0) \int f_{n+1}(k_1, \dots, k_n, k_{n+1})g(k_{n+1})d^3k_{n+1} + 4(n+1)n(f_{n+1}(k_1, \dots, k_{n-1}, k_n, k_n) \cdot \\ &\quad \cdot g(k_n))_s \end{aligned} \quad (III.22)$$

onde  $(\ )_s$  indica a função simetrizada em todas as suas variáveis. Notemos que o fator  $N^{-1}$  causa das dificuldades que levam ao teorema de Haag não comparece, por ser um fator multiplicativo comum, no sistema (III.22). Podemos facilmente verificar que as soluções exatas (III.5,10) satisfazem (III.22), como seria de esperar. Na aproximação  $n = 2$ , colocando  $f_n = 0$  para  $n > 1$  obtemos

$$\begin{aligned} E_0 &= 2\delta^3(0) \int f_1(k_1)g(k_1)d^3k_1 \\ (E_0 - 2w_{k_1})f_1(k_1) &= g(k_1) \end{aligned} \quad (III.23)$$

logo

$$E_0 = 2\delta^3(0) \int \frac{g^2(k)d^3k}{E_0 - 2w_k} \quad (III.24)$$

A solução da equação de auto-valores aproximada (III.24) considerando

$$\begin{aligned} \delta^3(0) &= \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{V}{(2\pi)^3} \quad \text{é dada por} \\ E_0 &= -\sqrt{2\delta^3(0) \int g^2(k)d^3k} + \frac{\int w(k)g^2(k)d^3k}{\int g^2(k)d^3k} \end{aligned} \quad (III.25a)$$

um resultado completamente diferente da solução exata obtida de (III.5)

$$E_0^{\text{exato}} = -\frac{\delta^3(0)}{2} \int (w_k - \sqrt{w_k^2 - 4g_k^2})d^3k \quad (III.25b)$$

contudo a atenção para o fato de que resolvendo-se a equação (III.24) por meio de uma expansão formal em série de potências de  $g$  obtemos em primeira aproximação  $E_0 = -\delta^3(0) \int \frac{g^2(k)}{w(k)} d^3k$  coincidindo com o primeiro termo da expansão em série da solução exata (III.25b).

O fracasso do método Tamm-Dancoff aplicado à este problema (que se manifesta em qualquer ordem de aproximação e não somente para  $n = 2$ ), pode ser facilmente compreendido como sendo devido ao fato de que colocando  $f_n = 0$  para  $n > n'$  equivale à negligenciar em (III.22) o termo  $\delta^3(0) \int f_{n'+1}(k_1 \dots k_n k_{n'+1}) \cdot g(k_{n'+1}) d^3 k_{n'+1}$  em presença de outros, o que é claramente injustificado já que em virtude do fator  $\delta^3(0)$  este termo domina os demais. Por outro lado como a self-energia do vácuo é proporcional ao volume  $E_0 - \delta^3(0)$  podemos concluir que em cada equação do sistema (III.22) o termo multiplicado por  $\delta^3(0)$  será exatamente cancelado pelo termo multiplicado por  $E_0$ .<sup>i</sup> Podendo ser diretamente verificado em nosso modelo mediante a substituição das soluções exatas em (III.22) este fato é uma regra geral independente do modelo. Passamos agora de (III.22) para o sistema 'reduzido'<sup>ii</sup>

$$\begin{aligned}
 E_0 &= 2\delta^3(0) \int f_1(k_1) g(k_1) d^3 k_1 \\
 -2 w_{k_1} f_1(k_1) &= g(k_1) + G f_2(k_1 k_1) g(k_1) \\
 \vdots & \\
 -2(w_{k_1} + \dots + w_{k_n}) f_n(k_1 \dots k_n) &= \left( f_{n-1}(k_1 \dots k_{n-1}) g(k_n) \right)_s + \\
 &+ 4(n+1)n \left( f_{n+1}(k_1 \dots k_{n-1} k_n k_n) g(k_n) \right)_s
 \end{aligned} \tag{III.26}$$

onde as divergências de volume já estão canceladas. Ao sistema (III.26) podemos aplicar o M.T.D., obtendo resultados independentes das divergências de volume (a não ser para  $E_0$  é claro) e cujo desenvolvimento em série de potências coincide até a potência  $g^{n-1}$  com as soluções exatas na  $n$ -ésima aproximação T.D. para a mesma amplitude. Já que as soluções exatas podem ser expandidas em série de potências vemos que as aproximações T.D. no sistema reduzido convergem para as soluções exatas. Na aproximação  $n = 2$  por exemplo, obtemos agora

$$\begin{aligned}
 f_1(k_1) &= -\frac{g(k_1)}{2 w(k_1)} \\
 E_0 &= -\delta^3(0) \int \frac{g^2(k)}{w(k)} d^3 k
 \end{aligned} \tag{III.27}$$

Nesta ordem os resultados do M.T.D. coincidem com as aproximações mais baixas da teoria de perturbações. Uma tal conexão entre o M.T.D. e a teoria de perturbações não é de modo algum geral, e depende estritamente do fato de que em nosso modelo os resultados exatos são funções regulares da constante de acoplamento.

Consideremos agora o sistema T.D. para uma partícula de momentum  $k$ .



Com

$$|1, k\rangle = K^{-1} \left\{ a_k^+ |0\rangle + \int F_1(k_1) a_k^+ a_{k_1}^+ |0\rangle d^3k_1 + \dots + \right. \\ \left. + \int F_n(k_1 \dots k_n) a_k^+ a_{k_1}^+ a_{k_2}^+ \dots a_{k_n}^+ |0\rangle d^3k_1 \dots d^3k_n + \dots \right\} \quad (\text{III.28})$$

$$H |1, k\rangle = E(k) |1, k\rangle$$

obtemos

$$(E - w_k) = 2\delta^3(0) \int F_1(k_1) g(k_1) d^3k_1 + 4 F_1(k) g(k) \\ (E - w_k - 2w_{k_1}) F_1(k_1) = g(k_1) + 4\delta^3(0) \int F_2(k_1, k_2) g(k_2) d^3k_2 + 8 F_2(k_1, k_1) g(k_1) + \\ \dots + 8 F_2(k_1, k) g(k) \\ (E - w_k - 2(w_{k_1} + \dots + w_{k_n})) F_n(k_1 \dots k_n) = (F_{n-1}(k_1 \dots k_{n-1}) g(k_n))_s + \\ + 2(n+1)\delta^3(0) \int F_{n+1}(k_1 \dots k_n, k_{n+1}) g(k_{n+1}) d^3k_{n+1} + 4(n+1)n (F_{n+1}(k_1 \dots k_{n-1}, k_n, k_n) \cdot \\ \cdot g(k_n))_s + 4(n+1) F_{n+1}(k_1 \dots k_n, k) g(k)$$

Da estrutura de (III.29) podemos ver o que também pode ser inferido diretamente da hamiltoniana (III.1) i.e., que a self-energia da partícula é unicamente devida à interferência de sua presença em processos de vácuo, não havendo no modelo uma contribuição resultante da emissão e reabsorção de partículas virtuais (vide discussão na Introdução).

Na aproximação T.D.  $n = 3$  (primeira não trivial) negligenciando os estados com mais de 3 partículas bare, ou seja  $F_n = 0$  para  $n > 1$ , a seguinte equação de autovalores é obtida

$$E - w(k) = 2\delta^3(0) \frac{\int g^2(k_1) d^3k_1}{E - w(k) - 2w(k_1)} + \frac{4g^2(k)}{E - 3w(k)} \quad (\text{III.30})$$

logo

$$E = -\sqrt{2\delta^3(0) \int g^2(k_1) d^3k_1} + \frac{\int w(k_1) g^2(k_1) d^3k_1}{\int g^2(k_1) d^3k_1} + w(k) \quad (\text{III.31})$$

e com (III.28a)  $E - E_0 = w(k)$  como no caso sem interação. O fracasso desta aplicação direta de H.T. ao problema em questão é novamente devida às divergências de volume, que podemos eliminar pelo mesmo argumento usado anteriormente. Separando  $E = E_0 + \bar{E}$  onde  $\bar{E}$  é independente do volume obtemos um sistema 'reduzido' livre de divergências de volume. Aplicando à este novo sistema o método Tamm-Dancoff obtemos soluções independentes de volume e que convergem para as exatas. Assim para  $n = 3$

$$(\bar{E} - w(k)) = 4 F_1(k) g(k) \quad (\text{III.32})$$

$$(\bar{E} - w(k) - 2w(k_1)) F_1(k_1) = g(k_1)$$

implicando em

$$\bar{E} = 2w(k) + \sqrt{w_k^2 + 4g_k^2} \quad (\text{III.33})$$

A solução (+) tende à  $\bar{E} = 3 w(k)$  quando  $g \rightarrow 0$  correspondendo à um estado com 3 partículas. A solução (-) dá a energia aproximada da partícula física i.e.

$$\bar{E} = 2 w_k - \sqrt{w_k^2 + 4 E_k^2} - w_k - 2g^2/w_k \quad \text{concordando até esta potência de } g \text{ com a solução exata dada por (III.5) } \bar{E} = \sqrt{w_k^2 - 4 E_k^2} .$$

É interessante comparar os nossos resultados anteriores com os que serão dados pelo novo M.T.D. Fixando nessa atenção no problema de uma partícula obtém-se com  $\Psi(|k\rangle) = \langle 0' | a(k') | 1k \rangle$  e  $\Psi(-k') = \langle 0' | a^*(-k') | 1k \rangle$  o sistema (vide I.II)

$$(E - E_0) \Psi(|k\rangle) = w(k') \Psi(|k\rangle) + 2 g(k') \Psi(-k')$$

$$(E - E_0) \Psi(-k') = -w(k') \Psi(-k') - 2 g(k') \Psi(|k\rangle) \quad \text{(III.34)}$$

Usando agora o fato de que  $\Psi(|k\rangle) = \Psi(-k') = 0$  para  $k \neq k'$ , simples consequência da invariância translacional da teoria, segue-se

$$E - E_0 = \bar{E} = \pm w \sqrt{w_k^2 - 4 E_k^2} \quad \text{(III.35)}$$

Obtemos assim imediatamente sem nenhuma aproximação e sem dificuldades provenientes de divergências de volume a solução exata de nosso modelo. O fato de ser desnecessário fazer qualquer aproximação resulta de o nosso modelo descrever somente efeitos de self-energia não dando lugar à espalhamento entre as partículas, o que leva à uma decomposição do normalmente infinito novo sistema T.D. em sub-sistemas finitos.

Por outro lado a dupla raiz de (III.35) ilustra o ponto mencionado na Introdução com respeito à insuficiente caracterização do vácuo físico no novo método. Assim a solução  $\bar{E} = -\sqrt{w_k^2 - 4E_k^2}$  corresponde à um intercâmbio  $|0'\rangle \rightarrow |1, -k\rangle$  e  $|1, k\rangle \rightarrow |0'\rangle$  ou seja na terminologia de Dyson à presença de uma partícula no estado de comparação (estado bra.) Esta multiplicidade de soluções manifesta-se também no cálculo dos estados mais elevados, por exemplo no cálculo do estado com duas partículas físicas as raízes

$$\pm \sqrt{w_{k_1}^2 - 4 E_{k_1}^2} \quad \pm \sqrt{w_{k_2}^2 - 4 E_{k_2}^2} \quad \text{serão encontradas, das quais somente}$$

$$+ \sqrt{w_{k_1}^2 - 4 E_{k_1}^2} + \sqrt{w_{k_2}^2 - 4 E_{k_2}^2} \quad \text{corresponde no vácuo físico como vetor}$$

bra. Num teoria que leva à espalhamento as diversas soluções apareceriam acopladas numa aproximação, levando à aparentes processos de produção a físicos, que podem ser eliminados segundo uma técnica introduzida por Dyson<sup>(5)</sup> e aperfeiçoada por Dalitz e Dyson<sup>(7)</sup>.

É oportuno chamar a atenção para o fato de que a interpretação usual de  $\left( \frac{\Psi_{\Phi}(n|m)}{\sqrt{n!m!}} \right)_{n=0 \rightarrow \infty, m=0 \rightarrow \infty}$  como sendo uma função de onda generalizada para o estado  $|\Phi\rangle$

deve ser tomada com muita reserva, já que mesmo para estados normalizáveis  $\langle \Phi | \Phi \rangle = 1$  temos que não somente  $\sum_{n,m} \frac{1}{n!m!} |\Psi_{\Phi}(n|m)|^2 c_n c_m = \infty$

mas também  $\int |\Psi_\Phi(n, n)|^2 d_n d_m = \infty$  para todos os termos exceto os primeiros da série. Facilmente verificável em nosso modelo este fato é uma propriedade geral de qualquer teoria relativisticamente invariante. As infinidades em questão são divergências de volume que assim manifestam-se também no novo método quando se procura normalizar as novas amplitudes. O resultado que observamos acima está intimamente ligado com a não ortogonalidade dos estados  $a_{k_1}^+ \dots a_{k_n}^+ |0\rangle$  a  $k_1' \dots k_n' |0\rangle$  (23) implicando por um lado em

$\langle \Phi | \Phi \rangle \neq \sum_{n, n'} \frac{1}{n! n'} \int |\Psi_\Phi(n, n)|^2 d_n d_m$  o que torna dubio o significado físico das novas amplitudes, e refletindo-se por outro na estrutura não hermitidna do novo sistema de equações, como já pode ser visto de (III.34).

Analisaremos finalmente o comportamento das velhas e novas amplitudes no nosso modelo, quando o número de operadores tende ao infinito. Para fixar as ideias estudaremos as amplitudes vácuo-vácuo, sendo imediata a generalização para um estado qualquer no lado ket da amplitude.

As integrais de normalização das velhas e novas amplitudes são com (III.7, 8, 11) dadas por

$$O_n = \int \bar{f}_n(k_1' \dots k_n') f_n(k_1 \dots k_n) \langle 0 | a_{k_1}^- a_{-k_1}^+ \dots a_{k_n}^- a_{-k_n}^+ | 0 \rangle d k_1' \dots d k_n' d k_1 \dots d k_n =$$

$$= \frac{2^n n!}{2^{2n} (n!)^2} \int \left( \operatorname{tgh} \theta(k_{i_1}) \dots \operatorname{tgh} \theta(k_{i_n}) \delta(k_{i_1} + k_{i_{n+1}}) \dots \delta(k_{i_n} + k_{i_{2n}}) \right)_S^2 \cdot$$

$$\cdot d k_1 \dots d k_{2n}$$

$$N_n = \frac{1}{2^n n!} \int |\langle 0' | a_{k_1}^+ \dots a_{k_{2n}}^+ | 0' \rangle|^2 d k_1 \dots d k_{2n} =$$

$$= \frac{2^n n!}{2^{2n} (n!)^2} \int \left( \frac{\sinh 2 \theta(k_{i_1})}{2} \dots \frac{\sinh 2 \theta(k_{i_n})}{2} \delta(k_{i_1} + k_{i_{n+1}}) \dots \dots \delta(k_{i_n} + k_{i_{2n}}) \right)_S^2 d k_1 \dots d k_{2n}$$

Embora ambas as expressões (III.36, 37) sejam divergentes com a nésima potência do volume, podemos a grosso modo dizer que como  $\operatorname{tgh} \theta < 1$  e

$$\frac{2^n}{2^{2n} (n!)^2} \rightarrow (\mathcal{V}_n)^{-1/2}, \quad n \rightarrow \infty \text{ a norma da velha amplitude tende a zero para } n \rightarrow \infty.$$

Por outro lado não há restrição sobre  $\sinh 2 \theta$  e para constantes de acoplamento suficientemente fortes teremos  $|\sinh 2 \theta| > 1$  e a norma da nova amplitude (III.37) divergirá com  $n$ .

Para colocar as afirmações acima em forma mais rigorosa tomemos provisoriamente um volume de quantização finito  $V$  e um cut-off auxiliar tal que  $g(k) = 0$  para  $|k| > K$ .

Comparando com a eq. III.15, agrupando a nésima potência de  $(\operatorname{tgh} \theta)^2$  achamos facilmente

$$O_n \leq \xi^n \sum_{l=1}^n \frac{(-1)^l}{n! l!} \left( \frac{V K^3}{2(2\pi)^3} \cdot \frac{4\pi}{3} \right)^l \frac{d^n}{dx^n} \left( \log(1-x) \right)_{x=0}^l \quad (\text{III.38})$$

onde  $\xi$  é o máximo de  $(\text{tgh } \theta)^2$ . Como o desenvolvimento em série de potências de  $\log(1-x)$  principia com  $x$  temos

$$O_n \leq \xi^n \frac{d^n}{dx^n} \left( \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left( \frac{V K^3}{3(2\pi)^2} \log(1-x) \right)^l \right)_{x=0} = \xi^n \frac{d^n}{dx^n} (1-x) \Big|_{x=0} = \frac{V K^3}{3(2\pi)^2} \quad (\text{III.39})$$

Tomando agora  $m$  como o primeiro inteiro maior que  $\frac{V K^3}{3(2\pi)^2}$  obtemos

$$O_n \leq \xi^n \frac{(n+1) \dots (n+m-1)}{(m-1)!} \leq \xi^n \frac{(n+m-1)^{m-1}}{(m-1)!} \quad (\text{III.40})$$

e para um  $m$  fixo mas arbitrariamente grande temos  $O_n \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow \infty$  já que  $\xi < 1$ . Da mesma maneira podemos mostrar que as novas amplitudes tendem para infinito com  $n$  desde que  $g(k)$  seja tal que  $|\text{senh } 2\theta_k| > 2$  para algum  $k$ . Cabe nos assinalar este critério para dar um sentido à questão da convergência ou não à zero das amplitudes, quando  $n$  tende ao infinito, à despeito de divergências de volume. Os resultados que obtivemos comparando as velhas e novas amplitudes relacionam-se com os encontrados por Symanzik<sup>(17)</sup> no caso do oscilador anarmonico.

O mal comportamento das novas amplitudes não teve influência nos cálculos que fizemos por meio do novo M.T.D., já que em nosso modelo não houve necessidade de fazer qualquer aproximação. Numa teoria mais realista contudo, onde torna-se necessário aproximar o sistema T.D. infinito por meio de sistemas finitos, um tal comportamento das amplitudes quando o número de operadores tende ao infinito, aliado à não hermiticidade do sistema, deverá influir desfavoravelmente quanto à convergência das aproximações às soluções exatas.

MÉTODOS À UM E À MUITOS TEMPOS1- UM MODELO SOLUVEL COM INTERAÇÃO DIRETA

Discutiremos neste capítulo um modelo soluvel, local e convergente da teoria dos campos, com interação direta. (Acoplamento de Fermi<sup>(29)</sup>)

Nosso propósito principal será o de fazer um estudo comparativo entre os métodos Tamm-Dancoff à um e à muitos tempos, aplicados ao cálculo da massa de um estado ligado numa teoria unificada, i.e. uma teoria onde todas as massas aparecem com efeitos da interação.

O modelo é formulado de modo à apresentar certas semelhanças estruturais com uma teoria mais realista como a de Heisenberg<sup>(8)</sup>, permitindo uma discussão simplificada dos métodos e ideias usadas pelo grupo de Heisenberg, bem como uma interpretação física para as aproximações empregadas.

Uma self-interação de um campo fermionico correspondente à uma massa 'bare' nula, pode dar lugar ao aparecimento de uma massa física diferente de zero ao mesmo tempo em que introduz forças de ligação entre as partículas físicas massivas levando à eventual formação de estados ligados. (partículas compostas)

Muito embora um tratamento rigoroso desta ideia que constitui a base de diversos esquemas unificados<sup>(8,28)</sup> ainda não tenha sido desenvolvido, o bom acordo entre as massas calculadas pela teoria de Heisenberg e os valores experimentais, nos leva à, partindo de partículas 'bare' de massa nula, tentar tornar explícito este aumento simultaneo de massas e efeitos de ligação<sup>iv</sup>, e à analisar o significado e a eficiência de diversos métodos de aproximação na descrição destes efeitos. A impossibilidade de, no presente estágio da teoria quântica dos campos, discutir rigorosamente estes problemas, nos leva à abordá-los através de modelos que embora suficientemente simples para serem resolvidos exatamente, possuam pelo menos parte da estrutura geral e propriedades que as teorias realistas são supostas conter.

Numa teoria relativística de um campo  $\psi_a(x,t)$  em self-interação descrevendo partículas 'a' acopladas por meio de um termo de interação de Fermi  $\psi_a^* \psi_a \psi_a^* \psi_a$  podemos decompor esta interação num termo de ligação  $a^+ a^+ a a$  representando a ligação (ou espalhamento) de duas partículas 'a' (vide fig.5), um termo de 'dressing'  $a^+ a a a + a^+ a^+ a^+ a$  correspondendo ao gráfico da fig.6, dando lugar à efeitos de self-massa, e finalmente termos de vácuo  $a^+ a^+ a^+ a^+ + a a a a$  responsáveis por processos de flutuação de vácuo. Os operadores  $a^+$  e  $a$  representam operadores de criação resp. aniquilação de uma partícula 'bare' 'a'.

No que segue não consideraremos termos de vácuo a cujo estudo dedicamos inteiramente o capítulo III. Apesar desta simplificação um tratamento exato dos termos restantes está ainda acima das nossas possibilidades já que não podemos levar em conta a interação completa da parte de 'dressing'.

(Veja-se o capítulo V para uma tentativa nesta direção).

A simplificação essencial que leva ao nosso modelo consiste na substituição do termo de 'dressing' por  $a^+ b b b + b^+ b^+ b^+ a$  correspondendo ao diagrama da fig. 7, onde  $b^+$  e  $b$  são operadores de criação e aniquilação de partículas 'b' descritas por um novo campo  $\psi_b(x,t)$ . Obviamente em virtude da falta de simetria entre operadores de criação e aniquilação no termo de interação, o modelo é não relativístico, (vide a discussão do teorema de Haag no cap. III) sendo agora contudo exatamente solúvel.

Tomemos as partículas 'a' com uma massa bare arbitrariamente pequena, de modo a poder considerar a sua energia em repouso 'bare' - em contraste com sua energia cinética - como nula. O papel das partículas 'b' será o de 'vestir' as partículas 'a' fornecendo-lhes uma energia em repouso física (digamos massa física) não nula. Esta massa é facilmente calculável (seção 2) e é uma quantidade finita.

Mostraremos que este processo de 'dressing' é o único efeito para o qual as partículas 'b' contribuem. Elas não se manifestam em qualquer outro processo e serão finalmente eliminadas do modelo.

A teoria assim obtida é local e finita também em estados com maior número de partículas do que os explicitamente calculados. O estado ligado de duas partículas 'a' é exatamente calculado (seção 3). Encontra-se que este estado ligado (digamos meson) é inteiramente devido à self-interação das partículas massivas 'a' (digamos nucleons) i.e. ao termo  $a^+ a^+ a a$  sem participação de partículas 'b' intermediárias a não ser no que se refere ao 'dressing' das partículas 'a' 'bare' de massa nula (digamos neutrinos) em partículas massivas.

O modelo esquematizado acima é certamente muito simples, o que não o impede de possuir algumas semelhanças estruturais com uma teoria relativística de partículas elementares do tipo proposto por Heisenberg. É importante notar contudo algumas diferenças essenciais provenientes do caráter não relativístico do nosso modelo:

- 1- A distinção que precisamos fazer entre massa em repouso (energia em repouso) e massa cinética (massa inercial) e que é não existente numa teoria relativisticamente invariante.
- 2- Embora venhamos a fazer uso de uma métrica indefinida no espaço de Hilbert<sup>(12)</sup> o seu papel será aqui completamente diferente do que ela tem na teoria de Heisenberg. No último caso uma métrica indefinida é utilizada para assegurar resultados finitos que em nosso modelo são obtidos de um modo completamente distinto. É também obvio que nada pode ser inferido do nosso modelo acerca do comportamento de uma teoria relativística nas vizinhanças do cone de luz, que constitui o problema central da quantização não canônica à la Heisenberg.

As soluções exatas do nosso modelo serão comparadas com os resultados de diversos métodos de aproximação, (seção 4) dando-se um ênfase especial ao método Tamm-Dancoff.

A teoria de perturbações é aplicada ao cálculo do problema de uma partícula convergindo para as soluções exatas à despeito da presença de produtos singulares do tipo  $(S_p)^3$  no cálculo da self-energia da partícula 'a'. (seção 4a).

Não fazemos uso do M.T.D. neste problema já que a primeira aproximação não trivial corresponde à solução exata.

O problema do estado ligado é tratado em termos dos M.T.D. à um e à muitos tempos. (seções 4b e 4c respectivamente). Na seção 4d mostramos como o M.T.D. à muitos tempos na aproximação  $n = 2$  é formalmente equivalente à um sistema infinito de equações à um tempo. Para completar o estudo discutimos na seção 4e a aplicação da equação de Bethe-Salpeter<sup>(15)</sup> ao problema do estado ligado. O resultado de nossa análise é de que o M.T.D. à um tempo - cu um método variacional equivalente<sup>(30)</sup> - dá lugar à soluções com energia negativa na aproximação  $n = 2$ : a ausência de uma correlação de tempo relativo entre as duas partículas 'a' formando o estado ligado, impede na ordem mais baixa o aparecimento das nuvens virtuais e massas destas partículas. Isto implica que ficamos com duas partículas de massa nula (neutrinos) e somente a energia de ligação dá a sua contribuição à energia total. Por outro lado o formalismo à muitos tempos (no caso à dois tempos) na mesma ordem  $n = 2$  fornece soluções que podem ser de energia positiva e são pelo menos qualitativamente aceitáveis. Aqui a existência de uma correlação de tempo relativo implica no 'dressing' de precisamente uma das partículas constituintes do estado ligado enquanto a outra permanece 'bare' e sem massa. Mais precisamente uma das partículas conserva a sua nuvem e portanto sua massa, enquanto que a nuvem da outra é negligenciada na aproximação  $n = 2$ . Portanto embora positiva a massa do estado ligado calculada pelo M.T.D. à muitos tempos em nosso modelo, diferirá do valor exato por precisamente uma massa de partícula 'a'.

No nosso modelo a aproximação  $n = 6$  do método à um tempo corresponde à solução exata, fato que é a causa da solubilidade do modelo.

A equação de Bethe-Salpeter na aproximação 'cadeia' também dá lugar à solução exata, o que pode ser facilmente inferido de uma análise dos diagramas de Feynman associados ao modelo, já que neste método ambas as partículas 'a' estão 'dresséd'.

Os resultados dos diferentes métodos de aproximação aplicados ao modelo confirmam portanto o que seria de esperar de simples argumentos físicos baseados sobre os diagramas de Feynman. Contudo, a generalização de nossos resultados à teoria de Heisenberg não é uma tarefa trivial já que nada sabemos sobre as soluções exatas desta teoria, e somente as aproximações mais baixas foram até agora tratadas. Embora venha a ficar claro que o método Tamm-Dancoff à um tempo, a não ser que convenientemente modificado como no cap. V, dará sempre péssimos resultados numa teoria unificada, a eficiência comparativa dos métodos à muitos tempos e Bethe-Salpeter é fortemente modelo-dependente. Obviamente, como discutiremos em maior detalhe na seção 4, em aproximações mais elevadas à teoria de Heisenberg não somente a massa das partículas elementares tenderá a aumentar pela inclusão de efeitos de 'dressing' mais elevados, mas também a energia de ligação, e se o bom acordo com a experiência obtido na ordem mais baixa do M.T.D. à muitos tempos tiver que ser mantido, este aumento deverá ser essencialmente o mesmo para os dois processos.

Se este for o caso, teremos que na teoria de Heisenberg o método Tamm-Dancoff à muitos tempos será superior ao esquema de Bethe-Salpeter, contrariamente ao que acontece em nosso modelo, onde todos os termos de ligação ficam incluídos já na aproximação mais baixa, e somente correções aos termos de 'dressing' aparecem em ordens mais elevadas.

Quanto ao problema relativístico de uma partícula: neste caso teríamos que resolver um sistema infinito de equações, e no método à um tempo, dificuldades relacionadas com as do aparecimento de soluções com energia negativa para o estado ligado (seção 4b), manifestam-se em qualquer ordem de aproximação. Estas questões serão tratadas no cap. V.

No apêndice A o propagador do estado ligado será determinado fazendo-se uso do fato de que a teoria de acoplamento de Fermi é um caso limite de um acoplamento de Yukawa quando a massa 'bare' do meson intermediário e a constante de acoplamento não renormalizada tendem ao infinito<sup>v(31,32)</sup>; esta equivalência permite também um simples cálculo do espalhamento de duas partículas 'a' usando as regras usuais de Feynman para teorias de tipo Yukawa. No mesmo tempo a carga mesônica (ou elétrica) i.e. a constante de acoplamento renormalizada das teorias usuais, aparece com uma bem determinada constante estrutural do modelo.

Nos apêndices B e C alguns tópicos relacionados com o modelo serão abordados.

## 2- FORMULAÇÃO DO MODELO - O PROBLEMA DE UMA PARTÍCULA

Sejam  $\Psi_a$  e  $\Psi_b$  campos quantizados descrevendo partículas 'a' e 'b' resp., com operadores de criação e aniquilação  $a^+$  e  $a$ ,  $b^+$  e  $b$ . Quantizaremos ambos os campos de acordo com uma estatística de Bose, já que a quantização através da estatística de Fermi, para levar à uma interação direta não nula, exigiria a introdução de graus adicionais de liberdade (ex. spin, partícula-anti-partícula) dando lugar à uma mera complicação algébrica e não alterando a estrutura geral dos resultados.

O campo 'a' será quantizado de acordo com uma métrica positiva definida

$$\begin{aligned} \{ \Psi_a(x,t), \Psi_a^+(x',t) \} &= \delta(x - x') \\ \{ a(k), a^+(k') \} &= \delta(k - k') \end{aligned} \tag{IV.1}$$

O campo 'b' será quantizado de acordo com uma métrica indefinida, para que a massa (energia em repouso) da partícula 'a' física seja positiva<sup>vi</sup> (vide o sinal das eq. IV.9,13)

$$\begin{aligned} \{ \Psi_b(x,t), \Psi_b^+(x',t) \} &= -\delta(x - x') \\ \{ b(k), b^+(k') \} &= -\delta(k - k') \end{aligned} \tag{IV.2}$$



A massa da partícula 'b' 'bare' é  $M > 0$ . A energia em repouso 'bare' da partícula 'a' é suposta igual a zero i.e. o termo  $m \psi_a^+ \psi_a$  é negligenciado na hamiltoniana:

Como já mencionamos acima, em virtude de caráter não relativístico do modelo não é possível tomar o limite  $m \rightarrow 0$  na parte de energia cinética da partícula 'a'.

De acordo com o que foi dito na seção 1 a hamiltoniana do modelo será

$$H = \int dx \left\{ \frac{1}{2m} \vec{\nabla} \psi_a^+ \vec{\nabla} \psi_a - \frac{1}{2M} \vec{\nabla} \psi_b^+ \vec{\nabla} \psi_b - M \psi_b^+ \psi_b + (2\pi)^3 \lambda_1 \psi_a^+ \psi_a \psi_a \psi_a \right. \\ \left. + (2\pi)^3 \lambda_2 \left( \psi_b^+ \psi_b^+ \psi_b^+ \psi_a + \psi_a^+ \psi_b \psi_b \psi_b \right) \right\} \quad (IV.3)$$

onde  $\lambda_1 < 0, \lambda_2$ , são constantes de acoplamento reais. Nos termos de interação

$$\psi_a^+ \psi_a^+ \psi_a \psi_a \quad e \quad \psi_b^+ \psi_b^+ \psi_b^+ \psi_a + c.c. \quad \text{incluimos tácitamente} \quad \text{vii} \quad \text{dois}$$

cut-offs auxiliares  $K_1$  e  $K_2$  que restringem os momenta à valores  $\leq K_1$  e  $\leq K_2$  respectivamente. Eles serão finalmente eliminados de modo que a teoria será local no limite  $K_1 \rightarrow \infty, K_2 \rightarrow \infty$ .

Tomemos agora  $M$  arbitrariamente grande e conseqüentemente podemos negligenciar o termo de energia cinética da partícula 'b'  $\vec{\nabla} \psi_b^+ \vec{\nabla} \psi_b / 2M$ , na hamiltoniana (IV.3). Ficará claro em breve que somente no limite  $M \rightarrow \infty$  poderemos resolver exatamente não só o problema de uma partícula 'a', mas também o problema do estado ligado.

No espaço dos momenta a hamiltoniana é escrita como

$$H = \int dk \left\{ \frac{k^2}{2m} a^+(k) a(k) - M b^+(k) b(k) \right\} + \lambda_1 \int dk_1 \dots dk_4 a^+(k_1) a^+(k_2) a(k_3) a(k_4) \cdot \\ \cdot \delta(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) + \quad (IV.4)$$

$$+ \lambda_2 \int dk_1 \dots dk_4 \left\{ b^+(k_1) b^+(k_2) b^+(k_3) a(k_4) + c.c. \right\} \delta(k_4 - \sum_1^3 k_i)$$

onde a seguinte notação é usada neste capítulo  $\vec{x} = x, \vec{k} = k, d^3x = dx, d^3k = dk, \delta^3(k) = \delta(k)$ , com  $M = c = 1$ . Note-se que em (IV.4)  $k_i^2 \leq K_1^2$  resp.  $k_2^2$ .

Seja agora  $|0\rangle$  o vácuo 'bare' do modelo, coincidindo com o vácuo físico em virtude da ausência de termos de flutuação do vácuo, de modo que  $H|0\rangle = 0$ .

O estado de uma partícula 'a' física com momenta  $k$  pode ser escrito como

$$|a, k\rangle = a^+(k) |0\rangle + \int dk_1 dk_2 dk_3 f(k_1 k_2 k_3) \delta(k - \sum_1^3 k_i) b^+(k_1) b^+(k_2) b^+(k_3) |0\rangle \quad (IV.5)$$

Com a equação de autovalores

$$H|a, k\rangle = E(k) |a, k\rangle \quad (IV.6)$$

obtemos de (IV.4,5) com o auxílio de (IV.1,2) e  $a|0\rangle = b|0\rangle = 0$ ,

$$E|a,k\rangle = \left\{ \frac{k^2}{2m} - 3 \lambda_2 \int f(k_1 k_2 k_3) \delta(k - \sum_1^3 k_i) dk_1 dk_2 dk_3 \right\} a^\dagger(k) |0\rangle + \int dk_1 dk_2 dk_3 \delta(k - \sum_1^3 k_i) (\lambda_2 + 3 M f(k_1 k_2 k_3)) b^\dagger(k_1) b^\dagger(k_2) b^\dagger(k_3) |0\rangle = E|a,k\rangle \quad (IV.7)$$

logo as equações

$$(E - 3M) f(k_1 k_2 k_3) = \lambda_2 \theta(K_2^2 - k_1^2) \theta(K_2^2 - k_2^2) \theta(K_2^2 - k_3^2) \quad (IV.8)$$

$$(E - \frac{k^2}{2m}) = -3 \lambda_2 \int dk_1 dk_2 dk_3 f(k_1 k_2 k_3) \delta(k - \sum_1^3 k_i) \theta(K_2^2 - k_1^2) \theta(K_2^2 - k_2^2) \theta(K_2^2 - k_3^2) \quad (IV.9)$$

onde o cut-off foi explicitamente introduzido através da função de Heaviside( $\theta$ ). As equações (IV.8,9) dão para  $E < 3M$

$$E - \frac{k^2}{2m} = 3 \lambda_2 G(k) / (3M - E) \quad (IV.10a)$$

onde

$$G(k) = \int dk_1 dk_2 dk_3 \delta(k - \sum_1^3 k_i) \theta(K_2^2 - k_1^2) \theta(K_2^2 - k_2^2) \theta(K_2^2 - k_3^2) \quad (IV.10b)$$

Após um cálculo simples obtemos  $G(k) = K_2^6 \pi^2 \frac{5}{3} + \theta(K_2^6)$  . Logo

$$E - \frac{k^2}{2m} = \frac{5 K_2^6 \lambda_2^2 \pi^2 + \theta(K_2^6)}{3M - E} \quad (IV.11)$$

Tomamos agora o limite  $K_2 \rightarrow \infty$ ,  $M \rightarrow \infty$ , de modo a ter

$$5 \lambda_2^2 K_2^6 \pi^2 / 3M \rightarrow \lambda_2^2 > 0 \quad , \quad \lambda \text{ finito} \quad (IV.12)$$

donde

$$E = \frac{k^2}{2m} + m_0 \quad \text{com } m_0 = \lambda_2^2 > 0 \quad \text{vi, viii} \quad (IV.13)$$

Claramente  $m_0$  é a energia em repouso positiva que a partícula 'a' ganha através de sua interação com partículas 'b' virtuais.

No limítete  $M \rightarrow \infty$ ,  $f(k_1 k_2 k_3)$  comporta-se como

$$f(k_1 k_2 k_3) = -\lambda_2 / 3M \quad (IV.14)$$

Logo neste limítete  $|a,k\rangle$  é um estado corretamente normalizado

$$\langle a,k | a,k' \rangle = \delta(k-k') (1 - m_0 / M) \quad (IV.15)$$

e também temos que  $|a,k\rangle \rightarrow a^\dagger(k) |0\rangle$  .

No cálculo acima não consideramos estados descrevendo o espalhamento de 3 partículas 'b' já que para isso uma energia  $E \gg 3M \rightarrow \infty$  seria necessária.

## 3- O PROBLEMA DO ESTADO LIGADO

O estado ligado de duas partículas 'a' tomadas no sistema centro de massa ( $k=0$ ) é calculado com o auxílio da equação de autovalores

$$H|2a\rangle = E|2a\rangle \quad (IV.16)$$

onde para  $|2a\rangle = |2a, k=0\rangle$  fazemos o 'ansatz'

$$|2a\rangle = \int dk f(k) a^+(k) a^+(-k) |0\rangle + \int dk_1 dk_2 dk_3 g(kk_1 k_2 k_3) \delta(k - \sum_1^3 k_i) b^+(k_1) b^+(k_2) b^+(k_3) a^+(-k) |0\rangle + \int dk_1 \dots dk_6 h(k_1 \dots k_6) \delta(\sum_1^6 k_i) b^+(k_1) \dots b^+(k_6) |0\rangle \quad (IV.17)$$

Após um cálculo simples o seguinte sistema de equações será obtido

$$(E - \frac{k^2}{m}) f(k) = 2 \lambda_1 \int dk' f(k') - 3! \lambda_2 \int dk_1 dk_2 dk_3 g(kk_1 k_2 k_3) \delta(k - \sum_1^3 k_i) \quad (IV.18)$$

$$\left\{ (E - \frac{k^2}{2m} - 3M) g(kk_1 k_2 k_3) - 2\lambda_2 f(k) \right\} \delta(k - \sum_1^3 k_i) = - 5! \lambda_2 \int dk_4 dk_5 dk_6 h(k_1 \dots k_6) \delta(\sum_1^6 k_i) \delta(k - \sum_1^3 k_i) \quad (IV.19)$$

$$(E - 3M) h(k_1 \dots k_6) \delta(\sum_1^6 k_i) = \lambda_2 \left\{ g(\sum_1^3 k_i k_1 k_2 k_3) \delta(\sum_1^6 k_i) \right\}_s \quad (IV.20)$$

onde o índice s indica simetrização em todas as variáveis.

De (IV.20) introduzindo em (IV.19) encontramos

$$\left( E - \frac{(\sum_1^3 k_i)^2}{2m} - 3M \right) g(\sum_1^3 k_i, k_1 k_2 k_3) = - 5! \left[ \lambda_2^2 / (E - 3M) \right] \int dk_4 dk_5 dk_6 \cdot \left\{ g(\sum_1^3 k_i k_1 k_2 k_3) \delta(\sum_1^6 k_i) \right\}_s + 2 \lambda_2 f(\sum_1^3 k_i) \quad (IV.21)$$

Para obtermos soluções explícitas do nosso sistema tomamos o limite  $k_2 \rightarrow \infty$  e  $M \rightarrow \infty$ . Então

$$g(\sum_1^3 k_i, k_1 k_2 k_3) = - 2 \lambda_2 f(\sum_1^3 k_i) / 3M + o(M^{-1}) + \lambda_2^2 S(k_1 k_2 k_3) = \frac{6}{10} (i)^{-2} + o((i)^{-5}) \quad (IV.22)$$

onde

$$S = - 5 \pi^2 g(\sum_1^3 k_i, k_1 k_2 k_3) - \kappa^{-6} \int dk_4 dk_5 dk_6 g(\sum_1^4 k_i k_2 k_3 k_4) \delta(\sum_1^6 k_i) + \dots \dots P(k_1 \dots k_6) + \dots \quad (IV.23)$$

de modo que

$$|S| \leq 5! |g(\sum_1^3 k_i, k_1 k_2 k_3)| \frac{(5 \pi^2)}{6} \quad (IV.24)$$

e portanto de (IV.22) usando (IV.12)

$$g\left(\sum_1^3 k_1 k_1 k_2 k_3\right) = -2\lambda_2^2 f\left(\sum_1^3 k_1\right)/3M + O(k^{-1}) \quad (\text{IV.25})$$

Substituindo (IV.25) em (IV.18) obtemos

$$\left(E - \frac{k^2}{2m}\right)f(k) = \left[\frac{4\lambda_2^2}{M}\right] G(k)f(k) + 2\lambda_1 \int dk' f(k') \quad (\text{IV.26})$$

e portanto com (IV.12)  $G(k)$  dado por (IV.10b)

$$\left(E - \frac{k^2}{2m} - 2m_0\right)f(k) = 2\lambda_1 \int dk' f(k') \quad (\text{IV.27})$$

De (IV.27) a seguinte equação para a energia  $E$  do estado ligado é obtida

$$\int_0^{K_1} dk |k| k^2 \left(E - \frac{k^2}{2m} - 2m_0\right)^{-1} = 1/8\pi^2 \lambda_1 \quad \text{com } K_1 \rightarrow \infty \quad (\text{IV.28})$$

e por integração

$$\frac{3}{2} (2m_0 - E)^{1/2} \arctg(K_1 / (2m_0 - E)^{1/2} m^{1/2}) = mK_1 + 1/8\pi^2 \lambda_1 \quad (\text{IV.29})$$

Tomando agora  $K_1 \rightarrow \infty$ ,  $\lambda_1 \rightarrow -0$ , de modo que

$$mK_1 + 1/8\pi^2 \lambda_1 \rightarrow \beta \quad \text{com } \beta \text{ finito e maior que zero} \quad (\text{IV.30})$$

obtemos para a energia do estado ligado

$$E = 2m_0 - B \quad (\text{IV.31})$$

$$B = 4\beta^2 / m^3 \pi^2 > 0 \quad (\text{IV.32})$$

Restringiremos  $\beta$  à valores suficientemente pequenos para que  $E > 0$ . Note-mos contudo que  $E < 0$  não representa uma contradição intrínseca numa teoria não relativística. Impomos  $E > 0$  para manter a analogia com uma teoria relativística a maior possível.

Para mostrar que o cálculo acima realmente dá uma solução do problema de estado ligado

$$E = 2m_0 - B, \quad f(k) = \left(E - \frac{k^2}{2m} - 2m_0\right)^{-1}$$

$$g\left(\sum_1^3 k_1, k_1 k_2 k_3\right) = -2\lambda_2^2 f\left(\sum_1^3 k_1\right)/3M \rightarrow 0 \quad \text{para } M \rightarrow \infty \quad (\text{IV.33})$$

basta substituir (IV.33) em (IV.18-20) e tomar os limites (IV.12,30). A solução é única se primeiro o limite (IV.12) e depois (IV.30) forem efetuados.

De (IV.33) é óbvio que as partículas 'b' somente participam do estado ligado em fornecendo às partículas 'a' uma energia em repouso  $m_0$ .

As forças de ligação são inteiramente causadas pelo termo  $(2\pi)^3 \lambda_1 \psi_a^\dagger \psi_a^\dagger \psi_a \psi_a$  desde que no limite (IV.12) o espalhamento (ou ligação) de partículas 'a' através de partículas 'b' intermediárias torna-se nulo. O termo de interação direta das partículas 'a' é diferente de zero apesar do limite  $\lambda_1 \rightarrow -0$  ser tomado, isso porque ao mesmo tempo fazemos  $K_1 \rightarrow \infty$ . (Vide apêndice C)

O limite (IV.12) mostra que as partículas 'b' também não se manifestam em nenhum processo real, uma energia  $E \gg \hbar \rightarrow \infty$  sendo necessária para que isto acontecesse. Portanto desde que consideramos somente processos com energia finita a nossa hamiltoniana (IV.4) é equivalente à

$$H' = \int dk \left\{ \frac{k^2}{2m} + m_0 \right\} a^\dagger(k) a(k) + \lambda_1 \int dk_1 \dots dk_4 \delta(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) a^\dagger(k_1) a^\dagger(k_2) a(k_3) a(k_4) \quad (IV.4a)$$

onde o efeito das partículas 'b' está contido no termo  $m_0$ . O estado ligado é dado aqui por  $|2a\rangle = \int f(k) a^\dagger(k) a^\dagger(-k) |0\rangle$  com valores para  $E$  e  $f(k)$  coincidente com (IV.33). É fácil verificar que a equivalência entre (IV.4a) e (IV.4) é mantida também em setores mais elevados. (i.e., estados com um número maior de partículas)

#### 4. MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO

No que se segue as soluções exatas do nosso modelo serão comparadas com os resultados obtidos por meio de diversos métodos de aproximação.

O propagador da partícula 'b' é dado por

$$S_F^b(x, t) = S_F^b(x_1 - x_2, t_1 - t_2) = \langle 0 | T \psi_b(x_1, t_1) \psi_b^\dagger(x_2, t_2) | 0 \rangle = i (2\pi)^{-4} \int d^4 p (p_0 - \hbar + i\varepsilon)^{-1} e^{i p(x_1 - x_2) - i p_0(t_1 - t_2)} \quad (IV.34)$$

coincidindo com o propagador livre como pode ser facilmente visto dos diagramas de Feynman correspondentes. Usaremos a notação  $x = x_1 - x_2$ ,  $t = t_1 - t_2$ ,  $d^4 x = dx dt$ ,  $d^4 p = dp dp_0$

$x^\nu p_\nu = xp - tp_0$ ,  $\theta(t) = 0$  ou 1 para  $t < 0$  ou  $t > 0$  resp. Com  $1_p$  indicamos a unidade no espaço  $\vec{p}$ ,  $\mathcal{F}_4$  representa a transformada de Fourier

$$\mathcal{F}_4 = (2\pi)^{-4} \int d^4 p e^{i p x} \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_4^{-1} = \int d^4 x e^{-i p x}$$

o seu inverso.

Assim

$$S_F^b(x, t) = \mathcal{F}_4 S_F^b(p_\nu) = \mathcal{F}_4 \left\{ i 1_p / (p_0 - \hbar + i\varepsilon) \right\} \quad (IV.35)$$

e

$$S_F^b(x, t) = \delta(x) \theta(t) e^{-i\hbar t} \quad (IV.36)$$

O propagador exato da partícula 'a' é, no limite  $M \rightarrow \infty$ ,  $K_2 \rightarrow \infty$ , dado por

$$S_F^a(x, t) = \langle 0 | T \Psi_a(x_1, t_1) \Psi_a^\dagger(x_2, t_2) | 0 \rangle = \int_4 \left\{ \frac{1}{(p_0 - (\frac{p^2}{2m} + m_0) + i\epsilon)} \right\} =$$

$$= \int_4 S_F^a(p_v) \quad (IV.37)$$

Da hamiltoniana (IV.3) a seguinte equação de movimento para o campo 'a' é obtida

$$i \frac{\partial \Psi_a}{\partial t} = - \frac{\Delta}{2m} \Psi_a + 2(2\pi)^3 \lambda_1 \Psi_a^\dagger \Psi_a \Psi_a + \lambda_2 (2\pi)^3 \Psi_b \Psi_b \Psi_b \quad (IV.38)$$

Observamos que a teoria é invariante sob a transformação

$$\Psi_a \rightarrow \Psi_a e^{i\theta}, \quad \Psi_a^\dagger \rightarrow \Psi_a^\dagger e^{-i\theta} \quad \Psi_b \rightarrow \Psi_b e^{i\theta/3}, \quad \Psi_b^\dagger \rightarrow \Psi_b^\dagger e^{-i\theta/3} \quad (IV.39)$$

donde se segue que

$$\langle 0 | T \Psi_{a(b)}^\dagger \Psi_{a(b)}^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | T \Psi_{a(b)} \Psi_{a(b)} | 0 \rangle = \langle 0 | T \Psi_{a(b)} \Psi_{b(a)}^\dagger | 0 \rangle = 0 \quad (IV.40)$$

#### a- Método perturbativo para o problema de uma partícula

A self-energia de uma partícula 'a', dada pelo diagrama da fig.7, escreve-se de acôrdo com as regras usuais no espaço das configurações<sup>(14)</sup>

$$\tilde{\Sigma}(x, t) = i 3! ((2\pi)^3 \lambda_2)^2 (S_F^b(x, t))^3 \quad (IV.41)$$

onde o termo  $(S_F^b)^3$  deve ser entendido como uma tripla convolução com respeito à transformada de fourrier do cut-off  $K_2$ . No espaço dos momenta

$$\int_4^{-1} \tilde{\Sigma}(x^v) = \tilde{\Sigma}(p_v) = (i 3! \lambda_2^2 / (2\pi)^2) S_F^b(p_v) \cdot S_F^b(p_v) \cdot S_F^b(p_v) \quad (IV.42)$$

onde  $\cdot$  representa a convolução no espaço dos momenta. Logo integrando sôbre as componentes de energia dos quadrivectores  $p_v$

$$\tilde{\Sigma}(p_v) = \frac{-3! \lambda_2^2}{p_0 - 3M + i\delta} \int dp_1 dp_2 dp_3 \theta(K_2^2 - p_1^2) \theta(K_2^2 - p_2^2) \theta(K_2^2 - p_3^2) \delta(p - \sum_1^3 p_i) \quad (IV.43)$$

onde o cut-off foi explicitamente re-introduzido. Temos assim

$$\tilde{\Sigma}(p_v) = -3! \lambda_2^2 G(p) / (p_0 - 3M) \quad (IV.44)$$

$G(p)$  dado por (IV.10b). Tomando o limite (IV.12)

$$\tilde{\Sigma}(p_v) \rightarrow m_0 \quad (IV.45)$$

Usando a fórmula para o propagador corrigido dada pela teoria das perturbações, obtemos o resultado esperando

$$S_F^a(p_v) = \frac{1}{(p_0 - (\frac{p^2}{2m} + \tilde{\Sigma}(p_v))} = \frac{1}{(p_0 - (\frac{p^2}{2m} + m_0))} \quad (IV.46)$$

de acôrdo com (IV.37) e (IV.13)

b- Método Tamm-Dancoff à um tempo para o problema do estado ligado

Consideremos a amplitude à um tempo para o estado ligado i.e.

$$\Psi(x_1 x_2 t) = \langle 0 | T V_a(x_1 t) V_a(x_2 t) | 2a \rangle = \langle 0 | \Psi_a(x_1 t) V_a(x_2 t) | 2a \rangle \quad (IV.47)$$

onde o produto cronológico para tempos iguais é definido como uma média entre  $t_1 - t_2 = \xi$  e  $t_1 - t_2 = -\xi$ ,  $\xi \rightarrow 0$ . Como nosso modelo é invariante sob translações no tempo (conservação de energia), temos

$$\Psi(x_1 x_2 t) = \Psi(x_1 x_2) e^{-iEt} \quad (IV.48)$$

sendo a energia do estado ligado. A equação de movimento (IV.38) leva à

$$\begin{aligned} E\Psi = & -\frac{\Delta_1}{2m} \Psi - \frac{\Delta_2}{2m} \Psi + 2(2\pi)^3 \lambda_1 \langle 0 | T: \Psi_a^+(x_1 t) V_a(x_1 t) V_a(x_1 t): \Psi_a(x_2 t) | 2a \rangle + \\ & + 2(2\pi)^3 \lambda_1 \langle 0 | T V_a(x_1 t): V_a^+(x_2 t) \Psi_a(x_2 t) V_a(x_2 t): | 2a \rangle + \\ & + (2\pi)^3 \lambda_2 \langle 0 | T (\Psi_b^+(x_1 t) \Psi_a(x_2 t)) | 2a \rangle + (2\pi)^3 \lambda_2 \langle 0 | T \Psi_a(x_1 t) (\Psi_b^+(x_2 t)) | 2a \rangle \end{aligned} \quad (IV.49)$$

onde como de hábito os cut-offs estão implícitos em (IV.49). Na aproximação  $n = 2$ , (vide Introdução), negligenciando os produtos normais com mais de dois operadores e observando que os termos contendo  $\Psi_b$  em (IV.49) não dão nenhuma contribuição em virtude de (IV.40), obtemos com o auxílio da regra de Wick

$$\begin{aligned} E\Psi(x_1 x_2) = & -\frac{\Delta_1}{2m} \Psi(x_1 x_2) - \frac{\Delta_2}{2m} \Psi(x_1 x_2) + \lambda_1 (2\pi)^3 \delta(x_1 - x_2) \Psi(x_1 x_1) + \\ & + \lambda_1 (2\pi)^3 \delta(x_1 - x_2) \Psi(x_2 x_2) \end{aligned} \quad (IV.50)$$

uma vez que

$$\delta_p^a(x, 0) = \frac{\delta(x)}{2} \quad (IV.51)$$

No espaço dos momentos tridimensionais temos a partir de (IV.50)

$$E\Psi(p_1 p_2) = \frac{(p_1^2 + p_2^2)}{2m} + 2\lambda_1 \int dp'_1 dp'_2 \Psi(p'_1 p'_2) \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \quad (IV.52)$$

e no sistema centro de massa onde  $\Psi(p_1 p_2) = f(p) \delta(p_1 + p_2)$  segue-se

$$E f(p) = \frac{p^2}{m} f(p) + 2\lambda_1 \int dp' f(p') \quad (IV.53)$$

cu seja em coordenadas relativas no espaço das configurações (cut-off implícito)

$$E f(x) + \frac{\Delta x}{m} f(x) - 2(2\pi)^3 \lambda_1 \delta(x) f(x) \quad (IV.54)$$

A equação (IV.54) pode ser interpretada como uma equação de Schrödinger com o potencial  $\delta$ .

De (IV.53) reintroduzindo o cut-off obtemos a equação de auto-valores

$$\int_{-\infty}^{\infty} d|p| p^2 (E - \frac{p^2}{m})^{-1} = 1/8\pi^3 \lambda_1 \quad (IV.55)$$

A equação (IV.55) em contraste com a exata (IV.28) não admite soluções positivas para a energia já que o integrando tem um polo para  $E > 0$ . Tomando o limite (IV.30) obtemos a partir de (IV.55)  $E = -B$ , com  $B$  dado por (IV.32). O aparecimento deste polo é devido à parte de energia cinética da hamiltoniana e é um aspecto geral da aproximação T.D. à um tempo.<sup>(30)</sup> Numa teoria relativística a dificuldade que aqui se manifesta como soluções de energia negativa, lá aparece como ausência de raízes reais. Isto é claro já que numa teoria relativística soluções com energia negativa estão em contradição com a estabilidade do vácuo, o que formalmente se traduz no fato de que a equação de auto-valores covariante é formulada em termos de  $E^2$  e não de  $E$ . Quando o limite (IV.12) é tomado, a aproximação  $n = 4$  do método à um tempo já dá a solução exata como pode ser facilmente visto de nossa discussão na seção 3.

Esta propriedade de nosso modelo é claramente inexistente numa teoria unificada realista onde as massas são um efeito da self-interação e não da interação com um segundo campo, levando à dificuldades do tipo mencionado acima em qualquer ordem de aproximação. (vide cap.V)

Fisicamente a impossibilidade de obter soluções razoáveis no método à um tempo vem do fato de que fixando-se o tempo relativo, o termo de massa  $m_0$  no propagador da partícula 'a' não se manifesta na equação de autovalores aproximada. Isto é particularmente trivial no caso não relativístico onde  $S_p^a(x,0) = \frac{\delta(x)}{2}$  independente da massa.

Sómente através da variação do tempo relativo é que um uso completo das equações de movimento é feito, com a consequente inclusão do efeito de 'dressing' que no método à um tempo, na aproximação  $n = 2$ , é completamente negligenciado.

#### c- Método Tamm-Dancoff à dois tempos

Da amplitude à dois tempos

$$\tilde{\phi}(x_1^V, x_2^V) = \langle 0 | T \psi_a(x_1^V) \psi_a(x_2^V) | 2a \rangle \quad (IV.56)$$

obtemos com (IV.36) com  $x_1^V = (x_1, t_1)$  e usando a regra de Wick

$$\frac{i\partial\tilde{\phi}}{\partial t_1} = -\frac{\Delta_1}{2m} \tilde{\phi} + 2\lambda_1 (2\pi)^3 \langle 0 | T \psi_a^+(x_1^V) \psi_a(x_2^V) | 0 \rangle \langle 0 | T \psi_a(x_1^V) \psi_a(x_1^V) | 2a \rangle + f(4) \quad (IV.57)$$

onde  $f(4)$  envolve produtos normais de 4 operadores. Na aproximação  $n = 2$  colocamos  $f(4) = 0$ , usando para  $S_p^a$  a expressão (IV.37) e com

$$\tilde{\phi}(x_1^V, x_2^V) = \int d^4 p_1 d^4 p_2 \tilde{\phi}(p_1^V, p_2^V) e^{i(p_1^V x_1^V + p_2^V x_2^V)} \quad (IV.58)$$



encontramos

$$\Phi(p_1^V, p_2^V) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{p_{02} - \frac{(p_2)^2}{2m} - m_0 + i\epsilon} \cdot \frac{1}{p_{01} - \frac{(p_1)^2}{2m} + i\epsilon} \lambda_1 \int d^4 p_1' d^4 p_2' \Phi(p_1^V, p_2^V) \cdot \delta^4(p_1^V + p_2^V - p_1^V - p_2^V) \quad (IV.59)$$

No sistema centro de massa onde

$$\Phi(p_1^V, p_2^V) = \Phi(p^V) \delta(p_1 + p_2) \delta(E - p_{01} - p_{02}) \quad (IV.60)$$

E sendo a energia do estado ligado e  $p^V = \frac{p_1^V - p_2^V}{2}$  o quadri-momento relativo achamos

$$\Phi(p^V) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(p_0 + \frac{E}{2}) - \frac{p^2}{2m} + i\epsilon} \cdot \frac{1}{(\frac{E}{2} - p_0) - (\frac{p^2}{2m} + m_0) + i\epsilon} \cdot \lambda_1 \int d^4 p' \Phi(p^V) \quad (IV.61)$$

Observamos que em (IV.61) temos o produto de um propagador livre i.e. o primeiro termo sem a massa  $m_0$ , por um propagador corrigido. De (IV.61) obtemos<sup>1x</sup>

$$1 = \frac{\lambda_1 i}{\pi} \int d^4 p \frac{1}{(p_0 + \frac{E}{2}) - \frac{p^2}{2m} + i\epsilon} \cdot \frac{1}{(\frac{E}{2} - p_0) - (\frac{p^2}{2m} + m_0) + i\epsilon} \quad (IV.62)$$

e integrando sobre  $p_0$

$$\int_0^{K_1} d|p| p^2 (E - \frac{p^2}{m} - m_0)^{-1} = 1/8 \pi^2 \quad (IV.63)$$

Tomando o limite (IV.30) encontramos

$$E = m_0 - B \quad (IV.64)$$

De (IV.64) vemos que embora para valores de  $B$  suficientemente pequenos a energia dada por esta aproximação seja positiva, ainda difere do valor exato (IV.33) por uma massa de partícula 'a'. Chamando de  $E^{(2)}$  o resultado do M.T.D. à muitos tempos na aproximação  $n = 2$ , e de  $E$  o valor exato temos

$$E = E^{(2)} + m_0 \quad (IV.65)$$

A última equação mostra que o M.T.D. à muitos tempos leva em conta o 'dressing' de somente uma das partículas constituintes do estado ligado, representando um progresso definitivo sobre o método à um tempo onde o 'dressing' é completamente negligenciado na ordem mais baixa de aproximação. Devemos notar contudo, que a eq. IV.65 somente é válida em nosso modelo porque em aproximações mais elevadas correções à massa de uma das partículas constituintes aparecerão (no nosso caso à partícula '1' já que a massa da outra já está corretamente incluída na função de contração), mas não teremos correções à energia de ligação  $B$ , que já em ordem mais baixa é levada em conta exatamente.

Na teoria de Heisenberg por outro lado, o bom acôrdo dos cálculos efetuados na aproximação  $n = 2$  do M.T.D. à muitos tempos com os resultados experimentais, pode ser uma indicação de que em ordens mais elevadas não só uma das partículas constituintes sofre um processo de 'dressing' passando de um neutrino à um nucleon, mas também a energia de ligação aumenta de um valor essencialmente igual, i.e. a massa de um nucleon. Uma resposta definitiva à esta questão, só pode ser dada é claro, por meio do cálculo das aproximações mais elevadas à teoria de Heisenberg, o que até o presente não foi conseguido.

d- Relação entre os formalismos à um e à muitos tempos

Seja  $\bar{t} = t_1 - t_2$  o tempo relativo,  $T = (t_1 + t_2)/2$  o tempo médio. A amplitude à dois tempos (IV.56) pode ser escrita como

$$\bar{\phi}(x_1^V, x_2^V) = \bar{\phi}(T + \frac{\bar{t}}{2}, T - \frac{\bar{t}}{2}, x_1, x_2) = \chi(T, \bar{t}, x_1, x_2) \quad (IV.66)$$

A equação (IV.57) em termos de  $\chi$  é

$$i \frac{\partial \chi}{\partial \bar{t}}(T, \bar{t}) + \frac{i}{2} \frac{\partial \chi}{\partial T}(T, \bar{t}) - \frac{\Delta}{2m} \chi(T, \bar{t}) + 2(2\pi)^3 \lambda_1 S_F^a(-\bar{t}) \chi(T + \bar{t}/2, 0) \quad (IV.67)$$

onde a dependência das coordenadas espaciais não é escrita explicitamente.

Com  $\chi(T, \bar{t}) = \chi(\bar{t}) e^{-iET}$  obtemos

$$i \frac{\partial \chi}{\partial \bar{t}}(\bar{t}) + \frac{E}{2} \chi(\bar{t}) = - \frac{\Delta}{2m} \chi(\bar{t}) + 2(2\pi)^3 \lambda_1 S_F^a(-\bar{t}) e^{-iE\bar{t}/2} \chi(0) \quad (IV.68)$$

para  $\bar{t} = 0$  a equação (IV.68) com (IV.51) e escrevendo  $\chi(0) = \chi(0, x) = f_0(x)$  leva à

$$E f_0(x) + \frac{\Delta}{m} f_0(x) - 2\lambda_1 (2\pi)^3 \delta(x) f_0(x) = -2i f_1(x) \quad (IV.69)$$

onde

$$f_1(x) = \left[ \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{t}} \right]_{\bar{t}=0} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \chi}{\partial \bar{t}} \Big|_{\bar{t} \rightarrow +0} + \frac{\partial \chi}{\partial \bar{t}} \Big|_{\bar{t} \rightarrow -0} \right]$$

A equação (IV.69) difere da equação à um tempo correspondente (IV.54) pelo termo  $-2if_1(x)$ . A consistência exige que  $-2if_1(x) = m_0 f_0(x)$  para os resultados dos cálculos feito com o M.T.D. à muitos tempos (IV.63) sejam reproduzidos.

Por diferenciação sucessiva da equação (IV.68) somos levados a um sistema à um tempo.

$$-2i f_n(x) = E f_{n-1}(x) + \frac{\Delta}{m} f_{n-1}(x) + 2(2\pi)^3 \lambda_1 \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j (n-1)!}{2^{n-1} j!(n-1-j)!} S_j(x) \left( \frac{-iE}{2} \right)^{n-1-j} f_0(x) \quad (IV.70)$$

onde  $f_n = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{t}} F_{n-1} \Big|_{\bar{t} \rightarrow +0} + \frac{\partial}{\partial \bar{t}} F_{n-1} \Big|_{\bar{t} \rightarrow -0} \right]$ ,  $S_n = \frac{\partial^n}{\partial \bar{t}^n} (S_F^a(\bar{t}))_{\bar{t} \rightarrow +0} = \left( -i \left( \frac{\Delta}{m} + m_0 \right) \right)^n$ .

De (IV.70) vemos que o método à muitos tempos na aproximação  $n = 2$  é formalmente equivalente à um sistema infinito de equações à um tempo.

Fica também claro de (IV.69) que é precisamente a diferenciação com respeito ao tempo relativo que faz aparecer o termo de massa  $m_0$ .

#### e- Equação de Bethe-Salpeter

A equação de Bethe-Salpeter para o estado ligado de duas partículas 'a' é dada por

$$F(x_1^V, x_2^V) = -2 (2\pi)^3 i \lambda_1 \int d^4 x' S_F^a(x_1^V - x'^V) S_F^a(x_2^V - x'^V) F(x'^V, x'^V) \quad (IV.71)$$

onde  $F(x_1^V, x_2^V)$  é a amplitude E.S.  $\langle 0 | T \bar{\Psi}_a(x_1^V) \Psi_a(x_2^V) | 2a \rangle$  ; (coincidindo é claro com a amplitude à muitos tempos; a aproximação feita para esta amplitude é que constitui a diferença entre os dois métodos.) Fazendo a transformação de Fourier de (IV.71)

$$F(p_1^V, p_2^V) = -i \frac{\lambda_1}{\pi} S_F^a(p_1^V) S_F^a(p_2^V) \int d^4 p_1' d^4 p_2' F(p_1^V, p_2^V) \delta^4(p_1^V + p_2^V - p_1'^V - p_2'^V) \quad (IV.72)$$

e no sistema centro de massa a seguinte equação de autovalores é obtida

$$1 = -i \frac{\lambda_1}{\pi} \int dp_0 dp S_F^a(p, p_0 + \frac{E}{2}) S_F^a(-p, \frac{E}{2} - p_0) \quad (IV.73)$$

Integrando sobre  $p_0$

$$\int_0^{K_1} d|p| p^2 (3 - \frac{p^2}{m^2} - 2m_0)^{-1} = 1/3 \pi' \lambda_1 \quad (IV.74)$$

A equação (IV.74) coincide com a equação exata (IV.28) como seria de esperar de uma análise dos diagramas de Feynman.

Da equação (IV.71) inferimos que se ambos os propagadores são substituídos por propagadores livres o resultado do N.T.D. à um tempo é reproduzido (eq. IV.55) e somente a energia de ligação dá sua contribuição à energia total (fig. 9a). Por outro lado manter um dos propagadores 'dressed' corresponde precisamente ao método à dois tempos (eq. IV.63), que descreve assim a ligação de uma partícula massiva à uma sem massa. (fig. 9b)

No esquema de Bethe-Salpeter vemos que ambas as partículas estão 'dressed', (fig. 9c) e conseqüentemente a equação de Bethe-Salpeter na teoria de Heisenberg (equação esta que além do mais somente pode ser introduzida de modo fenomenológico numa teoria quantizada não canonicamente) levaria à resultados que diferem dos experimentais por uma quantidade da ordem de grandeza da massa do nucleon. Esta diferença entre E.S. e o N.T.D. à muitos tempos não será no caso relativístico de exatamente uma massa de nucleon como em nosso modelo, já que a própria energia de ligação dependerá em geral da massa das partículas constituintes

$$B = B(m_1, m_2).$$

Existe contudo a possibilidade de que, pela inclusão de termos mais elevados de ligação na equação de Bethe-Salpeter, (ex-fig.10) um acôrdo possa ser estabelecido entre esta equação e o método à muitos tempos e consequentemente os valores experimentais, na teoria de Heisenberg.

Os resultados do presente capítulo podem ser assim resumidos: O M.T.D. à um tempo dará sempre maus resultados quando comparado com os formalismos à muitos tempos, seja o M.T.D. à muitos tempos ou B.S., em virtude de sua falha em levar em conta o 'dressing' das partículas constituintes do estado ligado. Embora tivessemos ilustrado este fato em nosso modelo somente na ordem mais baixa, este ponto fraco do método à um tempo será mantido numa teoria unificada realista em qualquer ordem de aproximação. (vide cap.V). Quanto à escolha entre o esquema de B.S. e o M.T.D. à muitos tempos est. dependerá fortemente da magnitude relativa entre a energia de ligação e as massas das partículas constituintes nas soluções exatas.

Finalmente observamos que a diferença entre os 3 métodos é particularmente crucial para as teorias unificadas. Numa teoria em que a interação simplesmente dá lugar à uma pequena correção para a massa 'bare' (não nula), todos estes métodos darão essencialmente o mesmo resultado.

Fig. 10. Diagrama de Feynman para a equação de Bethe-Salpeter. A linha superior representa a partícula de massa  $m_1$  e a linha inferior a partícula de massa  $m_2$ . O diagrama mostra a troca de uma partícula de massa  $m$  entre as duas partículas. A equação de Bethe-Salpeter para a função de onda  $\psi(p)$  é dada por:

$$\psi(p) = \frac{1}{E_1 + E_2 - E(p)} \int d^4x \psi(x) \dots$$

onde  $E_1$  e  $E_2$  são as energias das partículas constituintes e  $E(p)$  é a energia da partícula composta. A integral representa a interação entre as partículas.

Para a aproximação à muitos tempos de (9.11)

$$\psi(p) = \frac{1}{E_1 + E_2 - E(p)} \psi(p) \dots \quad (9.12)$$

Como partícula de massa  $m$  não se aproxima de  $E_1$  ou  $E_2$  quando  $E(p)$  tende ao infinito, então  $\psi(p)$  tende ao infinito quando  $E(p)$  tende ao infinito, e portanto para qualquer valor de  $E(p)$ ,  $\psi(p)$  tende ao infinito para certos valores de  $E(p)$ . Isto significa que a equação de Bethe-Salpeter para a partícula composta tem uma solução para qualquer valor de  $E(p)$ .

Finalmente, nota-se que a equação de Bethe-Salpeter para a função de onda  $\psi(p)$  está precisamente a mesma responsável pela aproximação de Bethe-Salpeter para as partículas representadas por  $\psi(p)$ .

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

com. T4290

## V - UN SISTEMA INFINITO PARA O PROBLEMA DE UMA PARTÍCULA

Neste capítulo estudaremos um modelo de um sistema infinito de equações do tipo Tamm-Dancoff à um tempo, correspondendo ao problema de uma partícula numa teoria unificada realista.

No capítulo anterior o problema de uma partícula era facilmente solúvel, já que em virtude das regras de seleção (a<sub>±</sub> 3b) somente dois vetores 'bare' compõem a expansão do estado físico (eq.IV.5). Uma tal hipersimplificação do problema real tende a esconder algumas dificuldades presentes na aplicação do método à um tempo ao problema de uma partícula, dificuldades estas que são da mesma natureza que as que se manifestam no aparecimento de energias negativas no problema do estado ligado estudado no capítulo IV.

Vamos supor que estejamos estudando uma teoria unificada, onde partículas de massa nula (neutrinos) tornam-se massivas em virtude da self-interação. Para o cálculo da massa física um sistema do seguinte tipo será obtido

$$\begin{aligned} E &= K_0 f(1) \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \tag{V.1}$$

$$(E - E_0(n))f(n) = K'_n f(n-1) + K_n f(n+1)$$

onde  $E$  é a energia, isto é a massa se o cálculo é feito para uma partícula em repouso,  $E_0(n)$  é a energia cinética de  $n+1$  partículas 'bare',  $K_n, K'_n$ , são kernels integrais e (V.1) exemplifica uma teoria em que a interação dá lugar à transições entre  $f(n)$  e  $f(n-1)$ ,  $f(n+1)$ , onde  $f(n)$  é a amplitude de  $n+1$  partículas com momentum total zero. O kernel  $K'_n$  é em geral tal que  $K'_n f(n-1)$  pode ser explicitamente integrada levando à  $f(n-1)$  como função de  $n-1$  combinações de  $n$  variáveis. A estrutura de (V.1) corresponde ao velho método à um tempo onde por simplicidade os termos de vácuo foram excluídos.

Fazendo a aproximação  $n+1$  obtemos de (V.1)

$$f(n) = \frac{K'_n f(n-1)}{(E - E_0(n))} \tag{V.2}$$

Como partimos de uma massa 'bare nula segue-se que  $E_0(n)$  anula-se quando todos os momenta são zero, tende à infinito quando pelo menos um momentum vai à infinito, e portanto para qualquer valor de  $E > 0$ ,  $f(n)$  dada por (V.2) terá um polo para certos valores dos momenta. Isto significa que o estado de uma partícula física possui uma onda 'outgoing' com  $n+1$  partículas, sendo portanto nesta aproximação uma partícula instável. Concluimos assim que não é possível em nenhuma aproximação achar um valor real e maior do que zero para  $E$ .

Fisicamente isto é bastante já que colocando  $f(n+1) = 0$ , estamos negligenciando precisamente o termo responsável pelo aparecimento da massa nas  $n+1$  partículas representadas por  $f(n)$ .

Fazendo uma tal aproximação estas  $n+1$  partículas permanecem 'neutrinos' nos quais o estado de uma partícula massiva pode decair.

A mesma dificuldade ocorrerá no novo M.T.D. à um tempo, com a complicação adicional do aparecimento de polos correspondendo à partículas de energia negativa nos estados intermediários cuja eliminação foi estudada por Dyson. (vide cap. III).

Nosso propósito é o de estudar o que acontece no limite  $n \rightarrow \infty$ , e o de propor uma modificação do esquema convencional de aproximações, de modo à obter auto-valores reais já em ordens finitas de aproximação.

Observamos que numa teoria com uma métrica positiva definida também não poderemos obter auto-valores complexos aproximados, a não ser uma folha afiada do plano cortado da energia. Numa teoria quantizada de acordo com uma métrica indefinida contudo, auto-valores complexos poderão ser encontrados na folha física (12).

O sistema (V.1) admite a seguinte solução formal

$$E = K_0 \frac{1}{E - E_0(1) - K_1} \frac{1}{E - E_0(2) - K_2} \frac{1}{E - E_0(3) - K_3} \frac{1}{E - E_0(4) - \dots} \dots \frac{K'_1}{K'_2} \frac{K'_2}{K'_3} \frac{K'_3}{K'_4} \dots \quad (V.3)$$

A estrutura basicamente simples de (V.3), uma espécie de fração continua de operadores, sugere que para uma escolha apropriada de  $K_i$ ,  $K'_i$ , possamos resolver exatamente o problema. Esta escolha será ditada em primeiro lugar por sua conveniência matemática, a interpretação física sendo gradualmente desenvolvida no decurso da exposição. Desde o começo devemos assegurar que a dificuldade assinalada em (V.2) persista em nosso modelo. Uma vez garantido este ponto, cremos que mesmo uma escolha particularmente simples para os kernels, não prejudicará uma discussão pelo menos qualitativa do comportamento de sistemas do tipo (V.1). Como também a tridimensionalidade do espaço dos momentos não parece ter um papel fundamental para uma análise estrutural de (V.1) formularemos o nosso modelo em termos de um sistema unidimensional de equações.

$$\begin{aligned} E &= c\lambda \int_0^\infty f_1(k_1) e^{-k_1} dk_1 \\ (E - k_1) f_1(k_1) &= c\lambda + \lambda \int_0^\infty f_2(k_1, k_2) e^{-k_2} dk_2 \\ (E - k_1 - k_2) f_2(k_1, k_2) &= \lambda f_1(k_1) + \lambda \int_0^\infty f_3(k_1, k_2, k_3) e^{-k_3} dk_3 \\ &\vdots \\ (E - \sum_{i=1}^n k_i) f_n(k_1, \dots, k_n) &= \lambda f_{n-1}(k_1, \dots, k_{n-1}) + \lambda \int_0^\infty f_{n+1}(k_1, \dots, k_{n+1}) e^{-k_{n+1}} dk_{n+1} \end{aligned} \quad (V.4)$$

onde os  $k_1$  são variáveis unidimensionais e positivas. O sistema (V.4) se enquadra na estrutura geral de (V.1), e podemos facilmente escrever a equação de auto-valores correspondente. A constante  $\lambda$  representa a constante de acoplamento do nosso modelo podendo ser real ou imaginária pura. O primeiro caso corresponde à uma métrica positiva definida, levando à auto-valores exatos negativos  $v^i$ , e conseqüentemente não dando lugar à dificuldade com polos (V.2), muito pelo contrário: uma partícula instável na solução exata pode aparecer como estável em uma certa aproximação. O caso de  $\lambda$  imaginário corresponde à auto-valores exatos positivos sendo portanto o caso que nos interessa mais de perto, implicando o uso de uma métrica indefinida.

A equação de auto-valores é dada por

$$E - \lambda^2 c^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-k_1} dk_1}{E - k_1 - \lambda^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-k_2} dk_2}{E - k_1 - k_2 - k_3 - \lambda^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-k_3} dk_3}{E - k_1 - k_2 - k_3 - \lambda^2 \dots}}} \quad (V.5)$$

isto é

$$E = \lambda^2 c^2 F(E) \quad (V.6)$$

onde  $F(E')$  satisfaz à equação integral ( $E'$  sendo uma variável livre)

$$F(E') = \int_0^{\infty} \frac{e^{-k_1} dk_1}{(E' - k_1) - \lambda^2 F(E' - k_1)} \quad (V.7)$$

que também pode ser escrita como

$$F(E') = e^{-E'} \int_0^{E'} \frac{e^t dt}{t - \lambda^2 F(t)} \quad (V.8)$$

Logo uma solução de (V.8) será dada como uma solução da equação diferencial

$$F' + F = \frac{1}{E' - \lambda^2 F} \quad (F' = \frac{dF}{dE'}) \quad (V.9)$$

com a condição inicial

$$\begin{aligned} F(E') &\rightarrow 0 \\ E' &\rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (V.10)$$

Deixaremos para o apêndice D uma discussão completa da equação diferencial (V.9) e a demonstração de que uma solução satisfazendo à (V.10) existe. Para o momento limitar-nos-emos à discutir as características da solução que podem ser diretamente obtidas de (V.8). Vemos imediatamente que a solução satisfazendo (V.10) comporta-se como  $1/E'$  para  $E' \rightarrow -\infty$ .

Disto segue-se que a função  $F(E')$  será negativa (e com efeito monotona decrescente-vide apêndice D) para  $E' < t_0$  onde  $t_0$  é uma solução real de  $t_0 = F(t_0)$ , sendo além disso analítica na vizinhança do eixo real  $< t_0$ . O ponto  $E' = t_0$  é um ponto singular de  $F(E')$  sendo um 'branch point' como pode ser visto de

$$\oint (F(z)e^z)' dz = \text{Disc}(F(z)e^z) = \oint \frac{e^z dz}{z - \lambda^2 F(z)} \neq 0 \quad (\text{V.11})$$

onde o cont. rno de inte\_ração é tomado em torno do ponto  $t_0$ . Este 'branch point' é o início de um corte no plano complexo de  $E'$ , por meio do qual a função  $F(E')$  pode ser univocamente definida no plano complexo.

Mostramos agora que para  $\lambda^2 > 0$  um ponto real tal que

$$t_0 - \lambda^2 F(t_0) = 0 \quad (\text{V.12})$$

existe com efeito. Se não fôsse o caso teríamos  $F(E')$  negativa e regular ao longo de todo o eixo real e a integral (V.8) existiria para qualquer  $E'$ , real, definido  $F$  sôbre o eixo real. Tomando agora o limite assintótico de  $F(E')$  quando  $E' \rightarrow \infty$ , encontraríamos  $F(E) = 1/E$  em contradição com  $F(E') < 0$ .

Esta contradição mostra que uma solução real da equação (V.12) existe para  $\lambda^2 > 0$  e portanto  $F$  tem um corte de  $t_0 \leq E' \leq \infty$ . Por outro lado como mostramos em detalhe no apêndice D, para  $\lambda^2 < 0$  um 'branch point' real não existe, o que implica à partir de (V.8)

$$\lim_{E' \rightarrow \infty} \frac{F(E') - \frac{E'}{\lambda^2} - \frac{1}{E'}}{\lambda^2} = 0, \quad \lambda^2 < 0 \quad (\text{V.13})$$

Segue-se que para  $\lambda^2 < 0$   $F(E')$  é regular em todo eixo real, possuindo contudo em geral dois 'branch point' complexos conjugados e cortes correspondentes no plano complexo. (vide apêndice E)

Da discussão acima concluímos que a equação de autovalores (V.6) admitirá soluções (ver também apêndice D)

$$\begin{aligned} \lambda^2 > 0, \quad c^2 \geq 1 &\longrightarrow E < 0 \\ \lambda^2 > 0, \quad c^2 < 1 &\longrightarrow \text{não há soluções na folha física} \\ \lambda^2 < 0, \quad c^2 < 1 &\longrightarrow E > 0 \\ \lambda^2 < 0, \quad c^2 \geq 1 &\longrightarrow E \text{ complexo ou não há soluções} \end{aligned} \quad (\text{V.14})$$

Tanto o caso em que não há soluções como o de auto-valores complexos significam que a partícula é instável. Antes de prosseguirmos com um estudo comparando as soluções exatas (V.14) com as dadas pelo método Tamm-Dancoff, procuraremos uma interpretação física para as soluções (V.14). Para este propósito necessitaremos das expressões exatas para as  $f_n$  dadas por

$$f_n(k_1 \dots k_n) = \frac{c \lambda^n}{(E - k_1 - \lambda^2 F(E - k_1))(E - k_1 - k_2 - \lambda^2 F(-k_1 - k_2)) \dots (E - \frac{1}{n} k_1 - \lambda^2 F(\frac{1}{n} k_1))} \quad (\text{V.15})$$



como pode ser facilmente verificado substituindo-se (V.15) em (V.4) com  $E, F(Z')$  dadas por (V.6,8) respectivamente.

Observemos que nos casos de soluções reais e  $c^2 \neq 1$ , as funções  $f_n$  não tem polos no domínio de variação dos  $k_1$ . Este fato caracteriza o estado representado pelo conjunto das  $f_n$  como sendo uma partícula estável. Para  $c^2 = 1, \lambda^2 > 0$  as  $f_n$  desenvolvem um polo na fronteira do domínio de variação dos  $k_1$ , isto é para  $k_1 = 0$ . Isto significa que a partícula está no limiar da estabilidade. (por exemplo o electrón na Q.E.D.)

É claro que a equação (V.15) está intimamente relacionada com os resultados obtidos na ordem mais baixa da teoria de perturbações, com a diferença de que os denominadores  $E - \sum_1^n k_1$ , propagadores 'bare' de  $n+1$  partículas, estão substituídos pelos denominadores 'dressed'  $E - \sum_1^n k_1 - \lambda^2 F(E - \sum_1^n k_1)$ . Este fato

permite a interpretação de  $F$  como uma self-energia, levando à uma discussão qualitativa de (V.14). Para isto consideremos  $c^2 \lambda^2 F$  como se fosse uma self-energia constante

$$c^2 \lambda^2 F(Z') - m = E \quad (V.16)$$

onde uma teoria com  $\lambda^2 > 0$  (métrica definida) tomamos  $m < 0$ , e com  $\lambda^2 < 0, m > 0$ .

Tomando agora a função  $f_1$  que representa duas partículas virtuais no estado de uma partícula física

$$f_1(k_1) = \frac{c \lambda}{E - k_1 - \frac{m}{c^2}} = \frac{c \lambda}{E(1 - \frac{1}{c^2}) - k_1} \quad (V.17)$$

Para  $\lambda^2 > 0$ , teríamos um polo em  $f_1$  para um certo valor de  $k_1$  se  $c^2 < 1$ , indicando uma partícula instável, e nenhuma polo para  $c^2 > 1$ , logo uma partícula estável. O caso de  $c^2 = 1$  corresponde ao linear de estabilidade, i.e. à uma partícula que do ponto de vista energético tanto pode ser estável como instável. As soluções exatas mostram que para  $\lambda^2 > 0$  ela ainda aparece como estável, para  $\lambda^2 < 0$  já é instável.

Vemos também que quando  $\lambda^2 < 0$  e  $c^2 > 1$  (V.17) possui um polo, quando  $c^2 < 1$  não há polo, isto é, um comportamento exatamente contrário ao que acontece com  $\lambda^2 > 0$ , de acordo com (V.14).

A equação (V.17) mostra além disso que o espalhamento de duas partículas deve principiar a partir de  $E' = m/c^2$  que é a menor energia para a qual  $f_1$  possui polos. Tomando  $f_2$  que à parte de um fator descreve a configuração de 3 partículas virtuais no estado de duas partículas físicas em espalhamento, sendo  $E'$  agora a energia total das duas partículas

$$f_2(k_1, k_2) = \frac{c \lambda^2}{(E' - k_1 - k_2 - m/c^2)(E' - k_1 - m/c^2)} \quad (V.18)$$

notamos que o 'threshold' para o espalhamento de duas partículas  $E' = m/c^2$  coincide com o 'threshold' para a produção de 3 partículas, i.e. o denominador  $E' - k_1 - k_2 - m/c^2$  anula-se para  $E' = m/c^2$  e  $k_1 = k_2 = 0$ . (O denominador  $E' - k_1 - m/c^2$  em (V.18) corresponde à uma correção ao processo elástico i.e. leva em conta o 'dressing' das partículas espalhadas).

Isto significa que pelo menos uma das partículas espalhadas está no limiar da estabilidade. Como no caso de uma partícula discutido acima, para  $\lambda^2 < 0$  esta partícula é estável, donde o corte real de  $F(E')$  ao passo que para  $\lambda^2 < 0$  ela é instável i.e. possui energia complexa o que se reflete no corte complexo de  $F(E')$ .

A argumentação acima leva à uma simples compreensão qualitativa dos resultados exatos, e permite o estabelecimento da equivalência entre o nosso modelo e o cálculo do propagador de uma partícula

$$S_F(E') = \frac{1}{E' - \lambda^2 c^2 F(E')} = \frac{1}{E' - c^2 H(E')} \quad (V.19)$$

por meio dos diagramas da fig.12, ou equivalentemente usando para  $H(E')$  a equação integral de Dyson (18)

$$H(E') = \frac{\lambda^2}{2(2N)i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0 dk_1 e^{-|k_1|}}{E' - k_0 - \frac{|k_1|}{2} - H(E' - k_0 - \frac{|k_1|}{2})} \cdot \frac{1}{k_0 - \frac{|k_1|}{2}} \quad (V.20)$$

Integrando (V.20) sobre  $k_0$  num contorno apropriado do plano complexo obtemos a equação integral (V.7) completando assim a prova da equivalência do nosso modelo com uma teoria descrita pelos gráficos da fig.12.

#### Métodos de aproximação

A equação de auto-valores obtida na  $n+1$ ésima aproximação Tanm-Dancoff onde negligenciamos  $f_{n+1}$  será

$$E = \lambda^2 c^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-k_1} dk_1}{E - k_1 - \lambda^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-k_2} dk_2}{E - k_1 - k_2 - \lambda^2} \dots \lambda^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-k_n} dk_n}{E - k_1 - \dots - k_n} \quad (V.21)$$

Para  $E > 0$  a última integral desenvolve o polo mencionado na equação (V.2) o que significa que não podemos ter uma raiz positiva da equação aproximada (V.21)

Poderíamos pensar em eliminar a dificuldade com o polo definindo as nossas integrais no sentido da parte principal, mas isto não pode ser a priori justificado já que corresponderia fisicamente à uma superposição de ondas 'ingoing' e 'outgoing' e não mais ao cálculo da energia de uma partícula estável. Quando  $\lambda^2 < 0$  podemos facilmente verificar por indução que a integral à direita de (V.21) é negativa para  $E < 0$ , logo multiplicada por  $\lambda^2$  dá uma quantidade positiva donde concluímos que também não existem raízes negativas de (V.21) para  $\lambda^2 < 0$ .

Quando  $\lambda^2 > 0$  por outro lado, está claro que poderemos obter auto-valores aproximados negativos mesmo no caso de não haver soluções exatas reais.

Observemos incidentalmente que a teoria de perturbações também falha completamente dando já em ordem mais baixa o resultado absurdo

$$E = -\lambda^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-k_1}}{k_1} dk_1 = \infty \quad (V.22)$$

indicando um comportamento não regular de  $E(\lambda^2)$ , também previsível das soluções exatas (V.14)

Indicamos agora algumas maneiras de obter auto-valores aproximados quando  $\lambda^2 < 0$ ,  $c^2 < 1$ , isto é quando autovalores exatos positivos existem. Em primeiro lugar poderíamos calcular a raiz complexa da equação de autovalores aproximada (V.21) considerando a sua parte real como dando o auto-valor aproximado. A consistência exige que para isto a parte imaginária da raiz seja muito menor que sua parte real, caso no qual a parte imaginária dará a grosso modo uma medida do erro cometido já que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} E^{(n)} = E$  exato. Nestas circunstâncias podemos obter diretamente a parte real considerando as integrais no sentido da parte principal, como exemplificado abaixo com a aproximação  $n = 2$ .

Supondo que a equação de auto-valores

$$E = \lambda^2 c^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-k_1}}{E - k_1} dk_1 \quad (V.23)$$

admite uma solução complexa  $E = R + i\xi$ , com  $|\xi| \ll R$  obtemos de (V.23)

$$E = \lambda^2 c^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-k_1} (R - k_1)}{(R - k_1)^2 + \xi^2} dk_1 = \lambda^2 c^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-k_1}}{R - k_1} dk_1 \quad (V.24)$$

$$\xi = \pm \lambda^2 c^2 \pi e^{-R}$$

No nosso modelo vemos que para  $|\lambda^2|$  muito pequeno temos  $R = \lambda^2 c^2 \log |\lambda^2| \gg \xi$ .  $\lambda^2 c^2 \pi e^{-R}$  de modo que a substituição das integrais por partes principais pode ser justificada a posteriori quando  $|\lambda^2| \ll 1$ .

Propomos agora um outro método com uma região de aplicabilidade muito maior, não somente em nosso modelo mas, assim o esperamos em virtude do significado físico deste método, em teorias muito mais gerais.

Tomando a equação de auto-valores exata (V.6) que re-escrevemos como

$$E = \lambda^2 c^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-k_1} dk_1}{E - k_1 - \lambda^2 F(E - k_1)} \quad (V.25)$$

façamos como em (V.16) a substituição de  $\lambda^2 F(E - k_1)$  dentro da integral por uma constante  $E/c^2$ . Deste modo a seguinte equação é obtida

$$E = \lambda^2 c^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-k_1} dk_1}{E(1 - \frac{1}{c^2}) - k_1} \quad (V.27)$$

A equação (V.27) possui a interessante característica de admitir soluções positivas para  $\lambda^2 < 0$ ,  $c^2 < 1$ , negativas para  $\lambda^2 > 0$ ,  $c^2 > 1$ , e não possui soluções reais nos outros casos, isto é (exceto para  $c^2 = 1$ ) o mesmo comportamento das soluções exatas (V.14). Matematicamente a substituição da eq. V.26 por V.27 pode ser justificada:

1. - Para  $|\lambda^2| \ll 1$ . Neste caso do estudo feito da equação diferencial (V.9) no apêndice D e das figuras 13, concluímos que

$$\begin{aligned} |F(E-k_1)| \leq F(E) &\leq 1/|\lambda| \sqrt{|1-c^2|} \\ |E| &\leq |\lambda| c^2 / \sqrt{|1-c^2|} \end{aligned} \quad (V.26)$$

Portanto o termo  $\lambda^2 F(E-k_1)$  em (V.26) dá uma contribuição negligível da ordem  $\leq |\lambda|$  exceto nos pontos onde o termo  $E-k_1$  é muito pequeno i.e.  $|E-k_1| \leq |\lambda|$ . Dentro deste pequeno intervalo podemos substituir  $F(E-k_1)$  por  $F(E) = E \lambda^2 c^2$ , obtendo deste modo a equação (V.27). No apêndice E este ponto será examinado com maior detalhe por meio de um cálculo concreto.

2 - Para  $\lambda^2 \ll -1$ . Neste caso observemos que o fator exponencial na integral (V.26) corta efetivamente os momentos muito elevados de modo que podemos sem grande erro substituir (V.26) por

$$E = \lambda^2 c^2 \int_0^K \frac{e^{-k_1} dk_1}{(E-k_1) - \lambda^2 F(E-k_1)} \quad (V.29)$$

onde  $K \gg 1$ . Por outro lado da análise feita no apêndice D e da fig.13 obtemos  $|F(E-k_1)| \leq (|\lambda| \sqrt{|1-c^2|})^{-1}$  e  $|F'(E-k_1)| \leq 1/|\lambda|^2$  o que mostra que a função  $F(E-k_1)$  comporta-se praticamente como uma constante para  $\frac{K}{\lambda^2} < 1$ , justificando a substituição de  $F(E-k_1)$  por  $F(E)$  quando  $\lambda^2 \ll 1$ .

Estendo inteiramente justificado nestes casos extremos, podemos esperar que o método acima dará resultados pelo menos qualitativamente aceitáveis para qualquer  $\lambda^2$ , a sua eficiência aumentando quando a substituição  $F(E-k_1) \rightarrow F(E)$  é feita numa aproximação mais elevada, isto é se em lugar de (V.27) escrevermos

$$E = \lambda^2 c^2 \int_0^\infty \frac{e^{-k_1} dk_1}{E-k_1 - \lambda^2 \int_0^\infty \frac{e^{-k_2} dk_2}{E(1-\frac{1}{2}) - k_1 - k_2}} \quad (V.30)$$

e assim por diante, já que com um aumento do número de integrais a expressão total torna-se cada vez menos sensível à qualquer aproximação feita na última integral.

Fisicamente o nosso método significa que na aproximação  $n+1$  não negligenciamos completamente  $f_{n+1}$  mas levamos em conta que esta função contribuirá para tornar massivas as partículas descritas por  $f_n$ .

Numa teoria relativística nossa modificação do M.T.D. equivale à escrever em vez de

$$f_n = \frac{K'_n f_{n+1}}{E - \sum |k_i|} \quad (V.31)$$

como em (V.2) a relação modificada

$$f_n = \frac{K'_n f_{n+1}}{E - \sum \sqrt{k_i^2 + E^2}} \quad (V.32)$$

onde  $E$ , a energia em repouso da partícula i.e. sua massa, é agora calculada de modo self-consistente. Uma tal modificação aproxima o método à um tempo dos métodos à muitos tempos (S.C. e T.D. à muitos tempos) que possuem um caráter self-consistente, como pode ser visto no nosso modelo da equação (à muitos tempos) (V.20), quando  $\eta(E')$  é substituído por  $E/c^2$  dentro da integral levando por um lado à aproximação mais baixa do M.T.D. à muitos tempos, e por outro efetuando-se a integração sobre  $k_0$  à nossa equação modificada (V.27).

Esta modificação está também intimamente relacionada com o método usado na teoria das perturbações de separar a massa 'bare' na massa física mais um contra-térmo e considerar este contra-térmo como se fosse uma correção mais elevada. Um tal procedimento é necessário, como vimos no capítulo II, para obter um formalismo de renormalização consistente numa teoria divergente, ao passo que neste capítulo fomos à ele conduzidos pela necessidade de eliminar os auto-valores complexos.

Uma linha de ataque semelhante à apresentada neste capítulo poderia ter sido usada para eliminar as dificuldades presentes no problema do estado ligado no M.T.D. à um tempo. Lá contudo um especial cuidado deve ser tomado para evitar a inclusão das massas das partículas constituintes sem ao mesmo tempo incluir efeitos mais elevados de ligação. (vide discussão no capítulo IV)

### CONCLUSÃO

No presente trabalho analisamos as seguintes questões:

- 1- A superioridade que o M.T.D. à muitos tempos oferece na sua aplicação à teorias divergentes quanto a introdução de um formalismo de renormalização.
- 2- O aparecimento de divergências de volume no 'velho' método Tamm-Dancoff, seu significado físico, sua eliminação seja por meio do 'novo' método, seja através de uma modificação apropriada do 'velho' método, sua conexão com o teorema de Haag. O comportamento das 'velhas' e 'novas' amplitudes quando o número de operadores tende para infinito e sua possível implicação sobre a convergência ou não dos métodos de aproximação.
- 3- As dificuldades encontradas na aplicação do M.T.D. a um tempo à teorias unificadas, manifestando-se no aparecimento de auto-valores aproximados complexos ou negativos, e sua eliminação por meio de métodos auto consistentes como por exemplo o M.T.D. à muitos tempos.

Os modelos solúveis que constituíram a parte central do nosso trabalho foram utilizados somente para clarificar o significado físico das diversas aproximações Tamm-Dancoff, muitas vezes escondido atrás dos cálculos complicados de uma teoria realista, e procuramos basear as generalizações nestes argumentos físicos.

O estudo feito possibilita a conclusão de que entre os métodos Tamm-Dancoff e o à muitos tempos possui vantagens nítidas sobre os demais, tanto na sua aplicação à teorias renormalizáveis divergentes, onde a sua covariância explícita possibilita a introdução de uma técnica mais satisfatória de renormalização, (cp. II) como à teorias unificadas finitas onde o seu caráter auto-consistente leva à auto-valores mais corretos (cp. IV e V). Sendo necessariamente um novo método (nos capítulos IV e V a ausência de flutuações de vácuo tornou irrelevante a distinção entre 'novo' e 'velho' método) está automaticamente livre de divergências de volume, mas provavelmente não convergirá para os resultados exatos em virtude da propriedade não decrescente das 'novas' amplitudes (cp. III) que é um reflexo do caráter insatisfatório da definição do produto normal pela regra de Wick. (cp. I e II). A natureza não convergente do formalismo à muitos tempos somente poderia construir desvantagens quanto ao seu uso num programa - atualmente irrealizável - de obtenção das soluções exatas de uma teoria realista, não desmerecendo a priori a sua aplicabilidade prática.

No caso de uma teoria finita seja através de um cut-off (como no cp. V), de um processo limite (como no cp. IV) ou de uma regularização à la Pauli-Villars ou Heisenberg, podemos aplicar o 'velho' M.T.D. após a eliminação das divergências de volume apresentada no capítulo III e uma modificação auto-consistente dada no capítulo V. Este método será possivelmente o único a convergir para os resultados exatos, se estes existirem, mas o seu caráter não explicitamente covariante lhe dá limitado valor prático em teorias relativisticamente invariantes. No que se refere à problemas de auto-valores podemos ainda esperar resultados razoáveis tomando a partícula em repouso e indentificando a energia em repouso com a massa. mas para problemas de colisões a alta energia onde as correções

relativísticas são de suma importância, seríamos forçados à ir para aproximações muito elevadas afim de re-obter uma estrutura covariante para os resultados.

Quanto ao 'novo' método a um tempo situa-se numa posição intermediária entre os dois outros possuindo as desvantagens de ambos e poucas das vantagens de cada. Isto é não sendo completamente covariante sua renormalização é complicada é bastante insatisfatória. Sendo um método a um tempo leva à dificuldades no cálculo de auto-valores em teorias unificadas. Sendo um 'novo' método o provável não decrescimento das suas amplitudes para  $n \rightarrow \infty$  deverá influenciar fortemente a sua convergência para os resultados exatos, e finalmente a não ortogonalidade destas amplitudes impede uma conexão precisa com as quantidades observáveis.

#### AGRADECIMENTOS

O autor deseja manifestar os seus agradecimentos aos Profs. W. Heisenberg, M. Schonberg e M. Taketani, bem como aos Drs. J. Guttinger, J. Osada e K. Sekine por um grande número de discussões e sugestões feitas no decorrer deste trabalho.

APÊNDICE

- A -

Discutiremos neste apêndice um ponto que tem recentemente recebido uma considerável atenção <sup>v(31,32)</sup> a saber, examinaremos a equivalência entre o nosso modelo com interação direta apresentado no capítulo IV e uma teoria com acoplamento indireto (tipo Yukawa), onde as partículas 'a' interagem através de partículas intermediárias que chamaremos 'c'. Estas partículas 'c' desempenham que as partículas 'a' são o análogo dos nucleons.

Seja a interação entre as partículas 'a' e 'c' descrita por uma hamiltoniana

$$H^a = \int dk \left\{ \left( \frac{k^2}{2m} + m_0 \right) a^+(k)a(k) + \left( \frac{k^2}{2\mu} + \mu_0 \right) c^+(k)c(k) \right\} + g_0 \int dk_1 dk_2 dk_3 \cdot \left\{ a^+(k_1)a^+(k_2)c(k_3)\delta(k_1+k_2-k_3) + c.c. \right\} \quad (A.1)$$

onde  $c^+$  e  $c$  são operadores de criação e aniquilação de partículas 'c', que são supostas possuídas de uma massa (energia em repouso) 'bare'  $\mu_0$  e uma massa cinética  $\mu$ ;  $g_0$  é a constante de acoplamento não renormalizada e como no capítulo IV assumiremos implicitamente um cut-off  $K_3$  no termo de interação de (A.1). Tomando a partícula física 'c' o ansatz

$$|c, k=0 \rangle = |c \rangle = c^+(0) |0 \rangle + \int dk h(k) a^+(k) a^+(-k) |0 \rangle \quad (A.2)$$

com  $H^a |0 \rangle = 0$

obtemos do problema de auto-valores as equações

$$E - \mu_0 = 8 \pi g_0^2 \int_0^{K_3} dk |k|^2 h(k) \quad (A.3)$$

$$h(k) \left( E - \frac{k^2}{2\mu} - 2\mu_0 \right) = g_0$$

donde segue-se a equação de auto-valores

$$E - \mu_0 = 8 \pi g_0^2 \int_0^{K_3} dk |k|^2 \left( E - \frac{k^2}{2\mu} - 2\mu_0 \right)^{-1} \quad (A.4)$$

Seguindo Jouvét, Ataka e outros tomemos agora o limite

$$\begin{aligned} g_0^2 &\rightarrow \infty & \text{tal que} & & \frac{g_0^2}{\mu_0} &\rightarrow -\lambda_1, & \lambda_1 < 0 & \text{e finito} \end{aligned} \quad (A.5)$$

de modo que de (A.4) obtemos

$$\int_0^{K_3} dk |k|^2 \left( E - \frac{k^2}{2\mu} - 2\mu_0 \right)^{-1} = 1/8 \pi \lambda_1 \quad (A.6)$$



e executamos o limite (IV.30).

Antes de entrarmos numa discussão das implicações do resultado acima examinamos rapidamente a extensão do problema de auto-valores para o estado ligado e discutido no capítulo IV, fora do sistema centro de massa.

No sistema centro de massa a equação (IV.28) e (A.6) pode ser escrita como

$$\lambda_1 \mathcal{N}(Z) = 1 \quad (A.7)$$

onde

$$\mathcal{N}(Z) = -\frac{1}{\beta} \int d^4 p' S_P^a(p'; p_0) S_P^a(-p'; Z-p_0) \quad (A.8)$$

é a contribuição de uma 'bubble' de duas partículas 'a', coincidindo à parte de fatores numéricos com a self-energia do propagador da partícula 'c'.

Com  $\beta$  dado por (IV.30) a equação (A.7) escreve-se no limite  $K_1 \rightarrow \infty, \lambda_1 \rightarrow -0$

$$\beta - \mathcal{N}^X(Z) = 0 \quad (A.9)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^X(Z) &= \lim_{K_1 \rightarrow \infty} \left( m K_1 + \frac{\mathcal{N}(Z)}{\beta} \right) = \frac{\mathcal{N}^X(Z)}{\beta} m^{3/2} (2m_0 - Z)^{1/2} = \\ &= (2 - 2m_0) \int_{Z=0}^{\infty} dx \rho(x)/(2-x) \end{aligned} \quad (A.10)$$

e

$$\rho(x) = \frac{1}{2} m^{3/2} (x - 2m_0)^{-1/2} \quad (A.11)$$

Uma análise detalhada da dependência de nossas formulas com o cut-off fora do sistema centro de massa, a ser feita no apêndice B, mostra que no caso geral a equação (A.9) toma a forma

$$(\beta - \alpha |k|) - \mathcal{N}^X(Z - k^2/4m) \quad (A.12)$$

onde  $k$  é o momentum total do estado ligado e  $\alpha$  uma constante que depende do tipo de cut-off usado. O argumento  $Z - k^2/4m$  em (A.12) é devido à uma transformação de Galileu, o termo  $\alpha |k|$  tem sua origem no fato de que um cut-off arbitrário pode introduzir forças dependentes da velocidade que fazem com que a energia de ligação dependa da velocidade absoluta do centro de massa. Usando uma classe conveniente de cut-offs (por exemplo de tipo gaussiano), e fazendo o limite  $K_1 \rightarrow \infty$  estas forças dependentes da velocidade podem ser evitadas levando à  $\alpha = 0$ . No que segue restringiremos-nos à cut-offs do tipo acima, de modo que as formulas fora do sistema centro de massa são obtidas das que se referem ao sistema centro de massa mediante a substituição  $Z \rightarrow Z - k^2/4m$ . Assim a equação de autovalores para um estado ligado com momentum  $k$  é

$$\beta - \mathcal{N}^X \left( Z - \frac{k^2}{4m} \right) = 0 \quad (A.13)$$

A coincidência, no limite  $\epsilon_0^2 \rightarrow \infty$ ,  $\mu_0 \rightarrow \infty$ , da equação de auto-valores (A.6) para a partícula física 'c' com a equação (IV.23) para o estado ligado de duas partículas 'a', mostra que pelo menos nos setores considerados (e provavelmente em todos os setores), a teoria de tipo Fermi é equivalente a um caso limite de uma teoria de acoplamento intermediário onde a massa 'bare' e a constante de acoplamento do meson intermediário tendem para infinito. Tal condição imposta sobre a teoria de Yukawa implica em a constante de (re) normalização  $Z$  da partícula 'c' tender à zero.  $Z$  é dada por

$$Z^{-1} = \langle c|c \rangle = 1 + \int dk |h(k)|^2 = 1 + \epsilon_0^2 \int dk |f(k)|^2 \quad (A.14)$$

onde  $f(k)$  é dada por (IV.33). De (A.14) vemos que realmente  $Z \rightarrow 0$  quando  $\epsilon_0^2 \rightarrow \infty$  i.e. a probabilidade de encontrar uma partícula 'bare' 'c' no estado de uma partícula física 'c' é zero e o estado normalizado de uma partícula física é no limite (A.5)

$$\downarrow_c = Z^{1/2} |c \rangle = \left( \int dk |f(k)|^2 \right)^{-1/2} \int dk f(k) a^+(k) a^+(-k) |0 \rangle \quad (A.15)$$

Comparando com (IV.33) vemos que  $\downarrow_c = \downarrow_{2a}$  onde  $\downarrow_{2a}$  é o estado ligado normalizado na teoria de Fermi. Temos assim que neste limite o campo 'c' não é independente do campo 'a' no sentido de que podemos escrever  $\Psi_c = \frac{\partial}{\partial \epsilon_0} \Psi_a \Psi_c$  desde que esta relação seja usada entre auto-estados de energia finita da hamiltoniana (A.1). Esta igualdade leva imediatamente da hamiltoniana (A.1) à hamiltoniana (IV.4a).

Quando procuramos resolver um problema de espalhamento numa teoria tipo Fermi (por exemplo na teoria de Heisenberg), e compara-lo com os resultados de uma teoria convencional de tipo Yukawa, é conveniente termos uma expressão para o propagador da partícula composta. A equivalência apontada acima fornece um meio simples para a obtenção deste propagador no nosso modelo<sup>x</sup>. No sistema centro de massa o propagador não renormalizado da partícula 'c' com  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  ainda finitos é dado por

$$\Delta_{F u}^c = (Z - \mu_0 - \epsilon_0^2 \mathcal{H}(Z))^{-1} \quad (A.16)$$

Em todas as quantidades observáveis, como por exemplo amplitudes de espalhamento somente o produto  $\epsilon_0^2 \Delta_{F u}^c$  comparece e que nos leva à introdução de um propagador renormalizado (diferindo por um fator  $\epsilon_0^2$  da definição usual)

$$\Delta_{F u}^c = \epsilon_0^2 \Delta_F^c = \epsilon_0^2 \Delta_{F u}^c = \epsilon_0^2 / (Z - \mu_0 - \epsilon_0^2 \mathcal{H}(Z)) \quad (A.17)$$

com

$$\Delta_F^c = Z^{-1} \Delta_{F u}^c \quad \text{e} \quad \epsilon^2 = \epsilon_0^2 Z \quad (A.18)$$

$g$  sendo a constante de acoplamento renormalizada. Fazendo nas fórmulas acima o limite (A.5) correspondente a  $g \rightarrow 0$ , e graficamente a contração de todas as linhas de mesons nos diagramas Feynman da teoria de acoplamento intermediário a um ponto, (vide fig.11) obtemos

$$\Delta_F^c \longrightarrow \Delta_F^i = (1/\lambda_1 - \mathcal{K}(E))^{-1} \quad (A.18)$$

que agora no limite  $E_1 \rightarrow \infty$ ,  $\lambda_1 \rightarrow 0$  com (IV.30) leva à

$$\Delta_F^i(E) = (0\pi)^{-1} (\beta - \mathcal{K}(E))^{-1} \quad (A.20)$$

O propagador do estado ligado assim definido é essencialmente o inverso da equação de auto-valores (A.9) o que permite obtê-lo diretamente na teoria de tipo Fermi assim que a equação de auto-valores for encontrada.

Aplicando o teorema de Cauchy à (A.20) no plano complexo de  $E$  cortado de  $2m_0$  à  $+\infty$  obtemos com (A.10) a representação espectral de Lehman-Kallen (34) que para um momento total  $k$  isto é com a substituição  $E \rightarrow E - \frac{k^2}{4m}$  é dada por

$$\Delta_F^i(E, k) = \frac{\beta}{(\mathcal{K}(E))^3} \frac{1}{E - \frac{k^2}{4m} - (2m_0 - E)} + \int_{2m_0}^{\infty} d\alpha \rho(\alpha) \left( E - \frac{k^2}{4m} - \alpha \right)^{-1} \quad (A.21)$$

onde

$$\rho(\alpha) = \frac{3/2}{16\pi} (\alpha - 2m_0)^{1/2} \left( \beta^2 - \frac{\mathcal{K}}{4} (\alpha - 2m_0) \right)^{-1} \quad (A.22)$$

Portanto o fator  $\beta/(\mathcal{K}(E))^3$  representa o quadrado da constante de acoplamento renormalizada  $g^2$  da partícula composta, coincidindo é claro com o valor limite de  $g^2$  quando  $E_0^2 \rightarrow \infty$  e então  $K_1 \rightarrow \infty$  na teoria de Yukawa.

Obviamente reter somente o termo com o polo de (A.21) correspondente à aproximação de Born das teorias de acoplamento indiretos, é inteiramente injustificado exceto para energias físicas perto do estado ligado. Observamos além disso de que na teoria de tipo Fermi mesmo este polo contém contribuições de Fermi leva à constante  $\lambda_1 \rightarrow 0$  o que também representa uma possível aproximação. Para energias muito elevadas obtemos de (A.21) que  $\Delta_F^i(E \rightarrow E_0^2 \rightarrow \infty)$  um resultado usual em teoria dos campos.

Com o auxílio do propagador (A.21) podemos agora facilmente calcular o problema do espalhamento de duas partículas 'a'.

O auto estado que descreve o espalhamento de duas tais partículas com momento total 0 (zero) é dado por

$$|k, -k\rangle = a^+(k)a^+(-k)|0\rangle + \frac{2}{i\mathcal{K}} \frac{1}{E - \mathcal{K}(E)} \int \frac{dk' a^+(k') a^+(-k') |0\rangle}{E - \frac{k'^2}{4m} - 2m_0 + i\epsilon} \quad (A.23)$$

onde  $E$  a energia física do estado é

$$E = \frac{k^2}{4m} + 2m_0 \quad (A.24)$$

De (A.23) obtemos facilmente a forma assintótica da função de onda de duas partículas

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{e^{ik(x_1-x_2)} + e^{-ik(x_1-x_2)}}{2} = \frac{\pi \gamma}{2} \frac{|k|}{B - \gamma^2(k)} e^{\frac{i|k||x_1-x_2|}{2}} \quad (\text{A.25})$$

Temos assim espalhamento semente e o 'phase-shift' correspondente é dado por

$$e^{2i\delta} = \frac{B - i \frac{\gamma \pi}{2} |k|}{B + i \frac{\gamma \pi}{2} |k|} \Rightarrow \delta = - \frac{\gamma \pi}{2} \frac{|k|}{\beta} \quad (\text{A.26})$$

onde vemos que  $\delta \rightarrow -\frac{\gamma}{2}$  quando  $|k| \rightarrow \infty$  o que é um reflexo do caráter pontiforme da interação. Notemos também que uma expansão em série de potências na constante de acoplamento  $B / (\gamma \pi)^2$  das quantidades observáveis tais como seções de choque de espalhamento ou 'phase shifts' não é possível em virtude da dependência singular destas quantidades como.

A análise feita no capítulo IV seção 4 comparando o N.T.D. à um tempo, o N.T.D. à muitos tempos e a equação de Bethe-Salpeter para o problema do estado ligado pode ser imediatamente estendida ao problema de espalhamento levando à 'phase-shifts' corretos nos três casos nas duas energias  $E = \frac{k^2}{m}$ ,  $E = \frac{k^2}{m} + m_0$ ,  $E = \frac{k^2}{m} + 2m_0$  respectivamente, para o estado com duas com momenta  $k$  e  $-k$ .

- 2 -

Este apêndice será dedicado à uma análise mais detalhada do problema do estado ligado estudado no cap. IV seção 3 com respeito à sua extensão para um momento de centro de massa arbitrário. Tomando um cut-off  $G(\frac{k^2}{k_1^2})$  tal que a parte de interação da hamiltoniana (IV.4a) seja

$$\mathbb{H}_{int} = \int d^3k_1 \dots d^3k_4 G\left(\frac{k_1^2}{k_1^2}\right) \dots G\left(\frac{k_4^2}{k_1^2}\right) \delta(k_1+k_2-k_3-k_4) a^+(k_1) a^+(k_2) \cdot a(k_3) a(k_4) \quad (\text{B.1})$$

com

$$G(0) = \lim_{k_1 \rightarrow \infty} G\left(\frac{k^2}{k_1^2}\right) = 1$$

e a condição de normalização

$$\int_0^\infty G^2(t^2) dt = 1$$

Esta última condição é escolhida afim de manter inalterada a equação (IV.30).

Vamos restringir para o momento as nossas considerações à  $G(t^2)$  que são funções monotonicamente decrescente de  $t$ .

O análogo da equação (IV.27) fora do sistema centro de massa é

$$f(k_1, k_2) \left( E - \frac{k_1^2}{2m} - \frac{k_2^2}{2m} - 2m_0 \right) = 2G \left( \frac{k_1^2}{K_1^2} \right) G \left( \frac{k_2^2}{K_1^2} \right) G \left( \frac{k_1^2}{K_1^2} \right) G \left( \frac{k_2^2}{K_1^2} \right) \cdot \\ \cdot \delta(k - k_1 - k_2) f(k_1, k_2) d k_1 d k_2 \quad (B.4)$$

onde  $K$  é o momentum total. De (B.4) obtemos a seguinte equação auto-valores

$$\frac{1}{2} = 2 \int G^2 \left( \frac{k_1^2}{K_1^2} \right) G^2 \left( \frac{k_2^2}{K_1^2} \right) \left( E - \frac{k_1^2}{2m} - \frac{k_2^2}{2m} - 2m_0 \right)^{-1} \delta(k - k_1 - k_2) d k_1 d k_2 \quad (B.5)$$

e por uma simples transformação

$$\frac{1}{2} = -2 \int d^3 k' G^2 \left( \frac{(k' - k/2)^2}{K_1^2} \right) G^2 \left( \frac{(k' + k/2)^2}{K_1^2} \right) \frac{m}{k'^2} + \int d^3 k' G^2 \left( \frac{(k' - k/2)^2}{K_1^2} \right) \cdot \\ \cdot G^2 \left( \frac{(k' + k/2)^2}{K_1^2} \right) \frac{m}{k'^2} \frac{(E - k^2/4m - 2m_0)}{(E - k^2/4m - \frac{K_1^2}{m} - 2m_0)} \quad (B.6)$$

Na segunda integral de (B.6) podemos desde logo tomar o limite  $K_1 \rightarrow \infty$  já que a integral é convergente dando

$$\lim_{K_1 \rightarrow \infty} 2 \int d^3 k' G^2 \left( \frac{(k' - k/2)^2}{K_1^2} \right) G^2 \left( \frac{(k' + k/2)^2}{K_1^2} \right) \frac{m}{k'^2} \frac{(E - k^2/4m - 2m_0)}{(E - k^2/4m - \frac{K_1^2}{m} - 2m_0)} = \\ = 8 \pi^2 \pi' (E - k^2/4m) \quad (B.7)$$

podemos agora a partir de (B.6) com (IV.30) obter

$$E = \lim_{K_1 \rightarrow \infty} \left( n K_1 - \frac{1}{4\pi} \int d^3 k' G^2 \left( \frac{(k' - k/2)^2}{K_1^2} \right) G^2 \left( \frac{(k' + k/2)^2}{K_1^2} \right) \frac{m}{k'^2} \right) + \pi' (E - \frac{k^2}{4m}) \quad (B.8)$$

Usando a hipótese de  $G(t)$  decrescente achamos

$$\int_0^\infty d|k'| G^4 \left( \frac{(|k'| + |k|/2)^2}{K_1^2} \right) \leq \frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3 k'}{k'^2} G^2 \left( \frac{(k' - k/2)^2}{K_1^2} \right) G^2 \left( \frac{(k' + k/2)^2}{K_1^2} \right) \leq (B.9) \\ \leq \int_0^\infty d|k'| G^4 \left( \frac{(|k'| - |k|/2)^2}{K_1^2} \right)$$

e com (B.3,6) encontramos

$$-n \frac{|k|}{2} \leq \lim_{K_1 \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{4\pi} \int \frac{d^3 k'}{k'^2} G^2 \left( \frac{(k' - k/2)^2}{K_1^2} \right) G^2 \left( \frac{(k' + k/2)^2}{K_1^2} \right) - n K_1 \right) \leq \\ \leq n \frac{|k|}{2}$$

Com (B.10) e o auxílio de considerações dimensionais vemos que a equação de su-  
tovalores (B.5) será no limite (IV.30) dada por

$$\beta - \alpha |k| = \mathcal{H}^A(\mathcal{E} - k^2/4m) \quad (\text{B.11})$$

com  $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , coincidindo com o que foi afirmado no apêndice A eq.(A.12).

Para uma vasta classe de cut-offs (por exemplo  $G\left(\frac{k^2}{K_1^2}\right) = \exp\left\{-\frac{k^2}{2K_1^2}\right\}$ )

temos  $\alpha = 0$  correspondente à eliminação das forças dependentes da velocidade. Por outro lado um simples cut-off de Heaviside  $\Theta(K_1^2 - k^2)$  leva à  $\alpha \neq 0$ .

A demonstração de (B.11) pode ser facilmente generalizada para o caso de  $G(t^2)$  não decrescente mas possuindo vários pontos de máximo e mínimo. Neste caso obteremos

$$m\left(+\frac{1}{2} + G^4(t_1^2) + \dots + G^4(t_1^2)\right) \leq \alpha \leq m\left(+\frac{1}{2} + G^4(t_1^2) - \dots - G^4(t_1^2)\right) \quad (\text{B.12})$$

onde os  $t_1^2$  são os pontos de máximo ou mínimo, o sinal superior correspondendo à pontos de máximo e o inferior à pontos de mínimo.

- C -

Apresentaremos aqui um simples argumento físico que ilustrará a necessidade de utilizar o processo limite (IV.30) para a obtenção de resultados finitos no limite local do modelo apresentado no capítulo IV. Observemos que tomando  $K_1 \rightarrow \infty$  sem fazer ao mesmo tempo  $\lambda_1 \rightarrow 0$  levará à uma teoria divergente. Estas divergências manifestar-se-ão no aparecimento de valores infinitos para as quantidades observáveis como indica a teoria das perturbações, mas no comportamento da teoria como se fosse livre i.e. seções de choque nulas, (vide eq.A.23) de acordo com o ponto de vista mantido por diversos autores<sup>(23,36)</sup> sobre o significado de uma teoria divergente.

O anulamento das seções de choque em nosso modelo pode ser compreendido interpretando a interação entre partículas 'a' como sendo devida à um potencial relativo de 'range'  $1/K_1$  e valor  $\lambda_1 = 2(2\pi)^3 K_1^3$  (vide eq. IV.54)

Em virtude do pequeno range do potencial, já classicamente esperaríamos encontrar uma seção de choque total da ordem de  $1/K_1^2 \rightarrow 0$ . À primeira vista poderíamos pensar que um tal resultado pudesse ser evitado mediante o aumento da força do potencial isto é tomando  $\lambda_1 \rightarrow \pm \infty$ . Isto contudo deixaria inalterado o argumento clássico, já que classicamente a seção de choque total depende somente das dimensões do potencial e não de sua força. Para obter um resultado não nulo devemos fazer uso de uma propriedade essencialmente quântica i.e., a possibilidade de ressonâncias no interior do potencial.

Introduzindo um vetor de propagação no interior do potencial por

$$\eta = \sqrt{2m(\mathcal{E}-V)} = \sqrt{2m(\mathcal{E}-\lambda_1^{-2}(2\pi)^3 K_1^3)} \quad (\text{C.1})$$

e impondo a presença de exatamente uma onda dentro do potencial obtemos

$$\frac{2 \Re K_1}{\Re} \longrightarrow 1 \quad (C.2)$$

implicando em

$$= 2_1 \Re K_1 \longrightarrow -1 \quad (C.3)$$

A maneira como o limite (C.3) é atingido é caracterizada pela nossa constante  $\beta$  em (IV.30) i.e.

$$\beta = \lim \left\{ n K_1 + \frac{1}{8 \Re K_1} \right\} \quad (C.4)$$

Vemos assim que os resultados não nulos obtidos quando (IV.30) é tomada são devidos a um efeito de proximidade de ressonância,  $\beta$  sendo uma medida desta proximidade. Em particular para  $\beta$  estamos sempre em ressonância como pode ser visto de (A.26).

= B =

Neste apêndice mostraremos a existência de uma solução da equação diferencial (V.9) satisfazendo (V.10). Da equação

$$y' + y = \frac{1}{x - \lambda^2 y} \quad (D.1)$$

calculamos as linhas de máximo e mínimo  $y' = 0$  obtendo

$$y = \left( \frac{x}{\lambda^2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{\lambda^4} - \frac{4}{\lambda^2}} \right) / 2 \quad (D.2)$$

Tomando a derivada segunda nos pontos satisfazendo à (D.2) encontramos

$$y'' = - \frac{1}{(x - \lambda^2 y)^2} < 0 \quad (D.3)$$

Consequentemente (D.2) descreve linhas de máximos e portanto qualquer solução de (D.1) que tenha um ponto  $(x_0, y_0)$  acima da curva inferior (monotonamente decrescente) estará sempre acima dela para  $x > x_0$ . (vide figs. 13,14)

As funções  $y_{\pm}(x)$  soluções de (D.1) com  $y_{\pm}(-K) = 0$  estão para  $x > -K$  entre o eixo real e a linha dos máximos inferior i.e. na zona escura das figs. 13,14, como pode ser visto de

$$y_{\pm}(x) = e^{-x} \int_{-K}^x \frac{e^t dt}{t - \lambda^2 y_{\pm}(t)} \quad (D.4)$$

observando que (D.4) implica em  $y_{\pm}(x)$  negativo desde que  $x > -K$ .

Portanto o limite  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y_{\pm}(x) = y(x)$  existe e dá a solução de (D.1) com a condição  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$  correspondendo à solução de

$$y(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x \frac{e^t dt}{t - y(t)} \quad (D.5)$$

que é nossa equação integral (V.9).

Mostramos agora que para  $\lambda^2 < 0$  o ponto  $y(x_0) = x_0/\lambda^2$  nunca é atingido para um  $x_0$  real e que implica que  $y(x)$  é regular numa vizinhança do eixo real. A existência de tal ponto significaria que  $y(x)$  deve cortar ou tangenciar a linha de singularidades  $\lambda^2 y = x$  neste ponto. Para  $x < x_0$  já foi visto que  $y(x) < 0$  e  $x - \lambda^2 y(x) < 0$ , e com (3.1) teríamos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} y'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \frac{1}{x - \lambda^2 y} - y(x) \right\} = -\infty \quad (3.6)$$

Contudo para que  $y(x)$  corte ou tangencie a linha de singularidades é necessário que tenhamos  $y'(x) \geq 1/\lambda^2$ . Esta contradição mostra que não existe um

ponto de corte e conseqüentemente (vide cap. V)  $y(x)$  se aproxima assintoticamente de  $1/\lambda^2$  para  $x \rightarrow \infty$ .

No caso de  $\lambda^2 > 0$  já vimos no capítulo V que um ponto de corte com a linha de singularidades existe, um fato que também é facilmente visível da fig. 14.

- - -

Afim de que possamos efetuar alguns cálculos quantitativos que no caso da equação integral (V.6, V.5) exigiriam o emprego de métodos numéricos propomos aqui a equação simplificada

$$y(x) = \int_{-K}^x \frac{dt}{t - \lambda^2 y(t)} \quad (3.1)$$

que é equivalente à

$$y' = \frac{1}{x - \lambda^2 y}, \quad y(-K) = 0 \quad (3.2)$$

Neste caso a ausência do fator de convergência exponencial impede que tomemos  $K \rightarrow \infty$ .

A equação (3.2) pode ser facilmente resolvida e impõe a condição inicial obtemos

$$y = \log \left\{ \frac{(\lambda^2 y - x) + \lambda^2}{K + \lambda^2} \right\} \quad (3.3)$$

Para  $\lambda^2 > 0$  existe sempre um 'branch point' real quando  $y(x_0) = \frac{x_0}{\lambda^2}$  com

$$y_0 = \log \left\{ \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + K} \right\} < 0, \quad x_0 = \lambda^2 \log \left\{ \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + K} \right\} < 0 \quad (3.4)$$

Para  $\lambda^2 < 0$  e  $|\lambda^2| < K$  temos dois 'branch points' complexos conjugados

$$y_0 = \log \left\{ \frac{|\lambda^2|}{K + \lambda^2} \right\} \pm i\pi, \quad x_0 = \lambda^2 y_0 \quad (3.5)$$

Para  $\lambda^2 = -K$  temos uma solução regular em todo o plano complexo

$$x = \lambda^2 (y + 1) \quad (3.6)$$

Para  $\lambda^2 < -K$  achamos novamente um 'branch point' real



$$y_0 = \log \left\{ \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + K} \right\}, \quad x_0 = \lambda^2 \log \left\{ \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + K} \right\} < -K \quad (2.7)$$

Os dois últimos casos são reflexo do fato de que ao contrário do que acontecia com nossa equação original,  $y(x)$  anula-se não para  $x \rightarrow -\infty$  mas num ponto finito  $x = K$ , e devemos excluí-los tomando  $|k^2| < K$ .

De (2.3) concluímos que para  $\lambda^2 < 0$ ,  $y(x)$  se aproxima assintoticamente de  $\frac{x}{\lambda^2} + 1$ ,  $x \rightarrow \infty$ , comportamento semelhante ao da solução de (V.3.5).

Consideremos agora o análogo da equação de auto-valores (V.6) isto é com (2.3)

$$x = \lambda^2 c^2 y \Rightarrow x = \lambda^2 c^2 \log \left\{ \frac{(x(\frac{1}{c^2} - 1) + \lambda^2)}{K + \lambda^2} \right\} \quad (2.8)$$

Tomando  $|\lambda^2| \ll K$  numa aproximação em que erros relativos da ordem de  $|\log(|\log(\frac{|\lambda^2|}{K})|)|/|\log(\frac{|\lambda^2|}{K})|$  são admitidos obtemos de (2.8)

$$\lambda^2 < 0, c^2 < 1 \quad x = \lambda^2 c^2 \log \left( -\frac{\lambda^2}{K} \right) > 0 \quad (2.9)$$

$$\lambda^2 < 0, c^2 \geq 1 \quad x = \lambda^2 c^2 \log \left( -\frac{\lambda^2}{K} \right) \pm i\pi \lambda^2 c^2$$

$$\lambda^2 > 0, c^2 \geq 1 \quad x = \lambda^2 c^2 \log \left( \frac{\lambda^2}{K} \right) < 0$$

$$\lambda^2 > 0, c^2 < 1 \quad x = \lambda^2 c^2 \log \left( \frac{\lambda^2}{K} \right) \pm i\pi \lambda^2 c^2$$

Dentro da mesma precisão examinaremos os vários métodos de aproximação propostos no capítulo V. Notemos que a dependência muito fraca das soluções (2.9) com  $K$  significa que somente os pontos na vizinhança da origem na equação integral (2.1) contribuem apreciavelmente para o problema dos auto-valores, o que significa que para  $|\lambda^2|$  muito pequeno e  $K$  da ordem da unidade os resultados (2.9) também se aplicam ao problema de auto-valores original (V.6).

A equação correspondente à (V.23) será

$$x = \lambda^2 c^2 \log \left( -\frac{\lambda^2}{K} \right) \quad (2.10)$$

com soluções

$$x = \lambda^2 c^2 \log \left( -\frac{\lambda^2}{K} \right) \pm i\pi \lambda^2 c^2 \text{ para } \lambda^2 < 0 \quad (2.11)$$

A parte real da solução (2.11) pode ser diretamente obtida como mencionado no capítulo V. eq. (V.24) i.e.

$$\operatorname{Re} x = \lambda^2 c^2 \log \frac{|\operatorname{Re} x|}{K} \Rightarrow \operatorname{Re} x = \lambda^2 c^2 \log \frac{|\lambda^2|}{K} \quad (2.12)$$

Embora este método de resultados apreciavelmente satisfatórios para  $|\lambda^2| \ll K$  quanto ao cálculo das partes reais das soluções, não suficientemente poderoso para decidir quanto à estabilidade ou não das soluções.

Com efeito ele sempre indica estabilidade para  $\lambda^2 > 0$  e instabilidade para  $\lambda^2 < 0$ , como podemos ver de (3.11).

Por outro lado o método apresentado na equação (7.27) leva à equação de auto-valores

$$\alpha = \lambda^2 c^2 \log \left( \frac{(\frac{1}{c^2} - 1)\lambda}{k} \right) \quad (3.13)$$

que para  $c^2 \neq 1$  e dentro dos erros cometidos na obtenção de (3.9) possui as mesmas soluções que (3.8), possibilitando assim uma discussão da estabilidade das mesmas. Neste respeito ele é definitivamente superior ao método prático,

Não procuramos comparar aqui ambos os métodos em aproximações mais elevadas já que isto somente teria sentido se conhecessemos as soluções exatas com precisão maior do que a dada por (3.9).

#### OBSERVAÇÕES

i- Já que para um volume finito a energia é dada por uma série  $E_0 = \sum_1^{\infty} r(k_1)$  poderíamos pensar que no limite  $V \rightarrow \infty$ , além do termo dominante  $\frac{V}{(2\pi)^3} \int r(k) d^3k$

têrmos menos divergentes e finitos compareceriam na expressão para  $E_0$ , tornando este cancelamento duvidoso. Se contudo  $r(k)$  for uma função suficientemente regular e  $r(k) \rightarrow 0$  como  $k \rightarrow \infty$ , esta última condição sendo de qualquer modo necessária para que a série convirja e podendo sempre ser satisfeita mediante o emprego de um cut-off auxiliar, a diferença entre a série e o termo dominante proporcional ao volume tenderá à zero quando o volume tender ao infinito.

ii- A atenção do autor foi recentemente chamada para o fato de que o nosso sistema reduzido corresponde ao usado por Bethe, Dyson et al. (6), onde contudo os termos divergentes com o volume foram simplesmente abandonados juntamente com todos os termos de self-energia. Aparentemente não foi observado que abandonar estes termos de self-energia do vácuo não constitui, como no caso dos termos de self-energia das partículas, uma aproximação, já que realmente estes são exatamente cancelados em cada equação. A única exceção à esta regra é o caso do sistema de equações para um estado que contém um grupo de partículas com os mesmos números quânticos que o vácuo caso em que as próprias amplitudes conterão divergências de volume.

iii- Este capítulo está parcialmente contido num trabalho conjunto de W. Güttinger, K. Sekine e o autor, efetuado no Max Planck Institut für Physik enquanto o autor era bolsista da I.A.S.A.

iv- Na teoria de Heisenberg a separação em massa e energia de ligação pode apresentar algumas dificuldades. Em última análise contudo tal distinção é questão de uma definição apropriada tomando-se por base os diagramas da teoria. Neste sentido o gráfico da fig.6 representa o processo básico que dá lugar ao aparecimento da massa no passo que a fig.5 descreve o processo básico de ligação ou espalhamento.

v- Esta equivalência foi apontada em primeiro lugar por Jouvét e mais recentemente por vários outros autores.

vi- Numa teoria em que o vácuo físico coincide com o 'bare', a energia física de uma partícula é sempre menor ou igual que a energia 'bare' quando a quantização é feita com métrica positiva definida.

Com efeito escrevendo  $a^+(k)|0\rangle = c|1,k\rangle + \sum_i c_i \phi_i$  onde os  $\phi_i$  representam es-

tados de espalhamento, cuja energia, por razões de estabilidade, deve ser maior que a energia do estado de uma partícula, e tomando  $\langle 0|a H a^+|0\rangle$  achamos  $\langle 0|a H a^+|0\rangle = \langle 0|a H_0 a^+|0\rangle + \langle 0|a H_{int} a^+|0\rangle = \langle 0|a H_0 a^+|0\rangle = E_{bare}$

onde fizemos uso do fato que  $\langle 0|a H_{int} a^+|0\rangle = 0$  quando a interação é escrita sob forma de produto normal. Por outro lado  $\langle 0|a H a^+|0\rangle = c^2 E + \sum_i c_i^2 E_i$

onde expandimos em termos de auto-estados da hamiltoniana total. Subtraindo ambas as igualdades obtemos  $c^2(E - E_{bare}) + \sum_i c_i^2 (E_i - E_{bare}) = 0$  o que implica que  $E \leq E_{bare}$ .

vii- Mais explicitamente eles serão escritos por extenso somente nas fórmulas finais para manter as nossas expressões mais compactas.

viii- Notemos que para um  $M$  finito existem duas raízes da eq.(IV.11) correspondendo à dois estados para a partícula física 'a'. Um fato semelhante i.e. o aparecimento de dois estados físicos embora exista somente um estado 'bare' foi estudado na Ref.23 e também ocorre no modelo de Lee<sup>(37)</sup> onde é devido ao aparecimento de um 'ghost state'. No nosso caso o segundo estado é realmente um 'ghost', já que sua norma é negativa, desaparecendo no limite  $M \rightarrow \infty$  pois sua energia tende ao infinito, o que impede sua manifestação em processos com energia finita.

ix- Em geral a equação (IV.61) deve ser simetrizada (ou antisimetrizada) com respeito à uma outra obtida partindo-se de uma derivação da variável '2'. No nosso caso isto não é necessário já que deixa inalterada a equação (IV.62) para a energia.

x- Observemos que em geral existem duas maneiras de definir o propagador de um estado ligado: ou como fizemos incluindo todos os diagramas da fig.11a e tomando então o limite  $g_0^2 \rightarrow \infty, \mu_0 \rightarrow \infty$ , obtendo deste modo a contribuição de um termo constante correspondente ao ponto da fig.11c. Ou separando a interação em duas partes, a primeira correspondendo à interação direta básica representada pelo ponto da fig.11c e proporcional à  $\lambda_1$ ; a segunda a parte restante transmitida por meio do propagador  $\lambda_1^2 K(E)/1-\lambda_1 K(E)$ . Esta segunda parte tende à zero com  $E \rightarrow \infty$  comportando-se como um propagador usual.

O termo  $\lambda_1$  corresponde assim à uma constante de subtração em tratamentos dispersivos.

No limite  $\lambda_1 \rightarrow 0$  - O ambas as possibilidades dão obviamente o mesmo resultado, formalmente  $\Delta_P^1 = \lambda_1^2 \langle 0 | T \Psi^\dagger(x_1) \Psi^\dagger(x_1) \Psi(x_2) \Psi(x_2) | 0 \rangle$

xi - É util chamar atenção para o fato de que a contrario do que acontece em teorias convencionais, não podemos variar a constante de acoplamento  $\frac{B}{(Rm)^3}$

sem ao mesmo tempo mudar as demais constantes da teoria como por exemplo a massa do estado ligado. Isto é devido ao caráter unificado de nosso modelo no sentido de que massas e espalhamento de partículas são ambos o resultado de uma mesma interação fundamental.

REFERENCIAS

- 1- I.Tamm - J.Phys. (U.S.S.R.), 9,448 (1945)
- 2- S.Dancoff - Phys. Rev. 78,302 (1950)
- 3- R. Egedorn - Introduction to Field Theory and Dispersion Relations -  
C.N.R.N. (1961)
- 4- S. Mandelstam - Phys. Rev. 112,1344 (1958)  
G. Chew - Lectures at Les Houches (ed. De Witt and Omnes)
- 5- F. Dyson - Phys. Rev. 91,1543 (1953)
- 6- F. Dyson, H. Bethe et al, - Phys. Rev. 95,1644 (1954)  
H. Levy - Phys. Rev. 88,72,725 (1952)
- 7- F. Dyson and E. Dalitz - Phys. Rev. 99,301 (1955)  
M. Cini - N.C. 10,526,614 (1953)  
A. Klein - Phys. Rev. 90,1101 (1953)  
J. Taylor - Phys. Rev. - 95,1644 (1954)
- 8- W. Heisenberg, et al. Zeit. Natur. 14a,441 (1959), Referencias á trabalhos  
prévios ali se encontram
- 9- R. Haag - Dan. Mat. Fys. 29, nº 12, (1953)
- 10- A. Wightman- Les Problemes Mathematiques de la Theorie Quantique des Champs  
C.N.R.S. Paris (1959)
- 11- G.C.Wick - Phys. Rev. 80,268 (1950)
- 12- K. Nagy - Nuovo Cim. Sup. 17, pg. 92 (1960)
- 13- L. Landau e R. Peierls - Zs. F. Phys. 62,188 (1930)
- 14- W. Heisenberg - Nachr. d. Gottinger Akad. Wiss. S. 111 (1953)
- 15- H. Bethe e E. Selpeter - Phys. Rev. 90,690 (1953)
- 16- R. Feynman - Phys. Rev. 76,749 (1949)  
Phys. Rev. 76,769 (1949)
- 17- K. Symanzik - Phd. Thesis , Gottingen (1953)
- 18- S. Schweber - Mesons e Fields - Vol. 1- Row. Peterson e Company.
- 19- H. Lehman, E. Symanzik e W. Zimmermann - Nuovo Cim. 1,205 (1955)
- 20- W. Heisenberg, F. Kortel e E. Mitter- Zeit. Natur. 10a, 425 (1953)
- 21- G. Feldman - Proc. Roy Soc. (London) A 223,112 (1954)
- 22- F. Redmond - Phys. Rev. 112,1404 (1958)
- 23- W. Guttlinger e J.A. Swieca - Zeit. Natur. 16a,1265 (1961)
- 24- J.A. Swieca - Nuclear Physics 35,606 (1962)
- 25- F. Dyson - Phys. Rev. 75,486 (1949)  
Phys. Rev. 75,1736 (1949)  
A. Salam - Phys. Rev. 82,217 (1951)  
Phys. Rev. 84,426 (1951)  
J.C. Ward - Phys. Rev. 84,697 (1951)

- 26- H. Lehmann, K.Symanzik e W. Zimmermann - Nuovo Cim. 2,425 (1955)
- 27- S. Mandelstam- Phys. Rev. 115,1741 (1959)  
Phys. Rev. 115,1752 (1959)
- 28- Y. Nambu e G. Jona-Lasinio- Phys. Rev. 122,345 (1961)  
Okubo e Marshak - preprint
- 29- E. Fermi - Zeits. f.Phys. 88,161 (1934)
- 30- K. Sekine e J.A. Swieca- Calculos não publicados sobre a teoria de Heisenberg.
- 31- B. Jouvét - Nuove Cim. 5,1 (1957)  
J.C. Houd e B. Jouvét - Nuovo Cim. 18,466 (1961)
- 32- Y. Ataka- Prog. Theor. Phys. 25,417 (1961)
- 33- W. Pauli e F. Villars - Rev. Mod. Phys. 21,434 (1949)
- 34- H. Lehmann- Nuovo Cim. 11,342 (1954)  
G. Kallen - Helv. Phys. Acta 25,417 (1952)
- 35- C. Møller- Lectures on elementary S-Matrix theory-Nordita publication (1958)
- 36- Landau- Niels Bohr e o development of Physics- edit. W.Pauli  
London (1958)
- 37- T.D. Lee- Phys. Rev. 95,1329 (1954)



Fig.1a

Diagrama do kernel  
na ordem mais baixa



Fig.1b

Solução iterativa da  
equação de ordem mais  
baixa

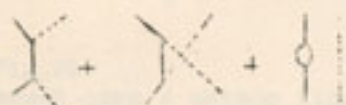


Fig.2

Kernel de 23 ordem

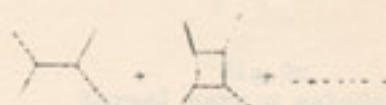


Fig.3

Solução iterativa da  
equação II.45



Fig.4

Solução iterativa da  
equação II.46



Fig.5

Diagrama básico de li-  
gação ou espalhamento



Fig. 6  
Diagrama básico de  
'dressing'



Fig. 7  
Dressing de partículas  
'a' por meio de partí-  
culas 'b'.

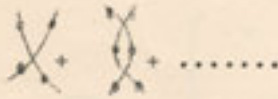


Fig. 8  
Diagramas de espalhamento  
ou ligação para partículas  
'dresséd' 'a'.



Fig. 9a  
Kernel para o estado li-  
gado no M.T.D. à um  
tempo. Nenhuma partícu-  
la 'dresséd'.



Fig. 9b  
Kernel para o estado liga-  
do no M.T.D. à dois tempos.  
Uma partícula 'dresséd'.



Fig. 9c  
Kernel para o estado li-  
gado na equação de Bethe-  
- Salpeter. Duas partícu-  
las 'dresséd'.



Fig. 10  
Correções de ligação mais elevadas  
à equação de B.S. na teoria de  
Heisenberg inexistentes no modelo.



Fig. 11a  
Propagador da partícula  
'c' na teoria de acopl-  
amento intermediário.  
( )



Fig. 11b  
Processo limite

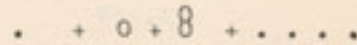


Fig. 11c  
Propagador do estado li-  
gado de duas partículas  
'a' resultante do proces-  
so limite.



$$\text{---} = 1/E' - \frac{|k|}{2}$$

$$o = \mathcal{H}(E')$$

$$\text{---} = \text{---} + \begin{matrix} \circ \\ c \end{matrix} \text{---} + \begin{matrix} \circ \circ \\ c \ c \end{matrix} \text{---} + \dots + (E' - c^2 \mathcal{H}(E'))^{-1}$$

$$\text{---} = \text{---} + \begin{matrix} \circ \\ c \end{matrix} \text{---} + \begin{matrix} \circ \circ \\ c \ c \end{matrix} \text{---} + \dots = ( \text{---} - \mathcal{H}(E') )^{-1}$$

$$e = \text{---} + \left\{ \begin{array}{l} + \text{---} + \text{---} + \dots \\ + \text{---} + \text{---} + \text{---} \\ + \text{---} + \text{---} + \text{---} \end{array} \right\} = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots$$

Fig.12

Equação integral (V.20) para (E') em termo de fdiagramas.

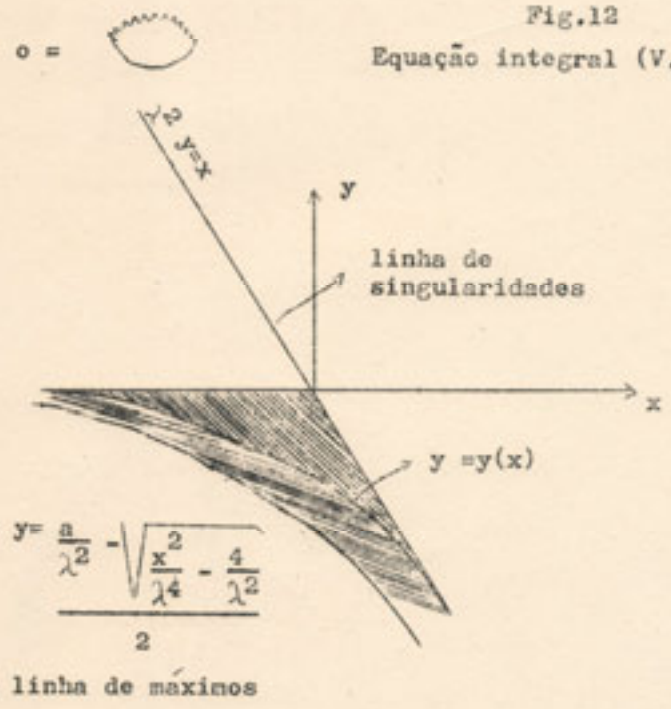


Fig.13

Função  $y(x)$  e linha de máximos para  $\lambda^2 < 0$

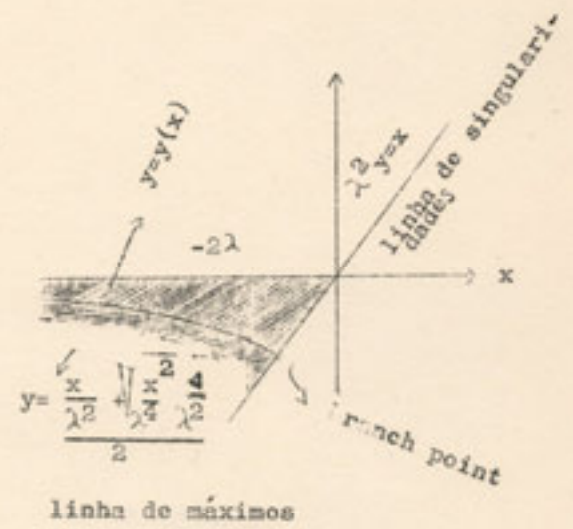


Fig.4

Função  $y(x)$  e linha de máximos para  $\lambda^2 > 0$